Calcul vectoriel

Cours et exercices corrigés

Claire David

Calcul vectoriel

Cours et exercices corrigés

DUNOD

Illustration de couverture : © Sirylok - Fotolia.com

ISBN 978-2-10-058264-8

Avant-propos

Destiné aux étudiants de première année du cycle de licence scientifique, ou des classes préparatoires aux grandes écoles, ce livre est une introduction au Calcul Vectoriel, et, par là-même, à l'algèbre linéaire. Il est issu des notes de mon cours donné à l'Université Pierre et Marie Curie, en L1. Le programme initial de l'U.E. avait été établi par Hervé Le Dret [1], Gilles Christol, Jacques Fejoz [2] et Laurent Koelblen, afin de faciliter l'accès ultérieur des étudiants aux notions algébriques plus abstraites, dont la théorie des espaces vectoriels, qui n'est pas abordée ici. C'est à partir de ce programme que j'ai construit mon propre cours.

Je tiens à remercier, tout d'abord, Arnaud Pocheville pour sa relecture et ses questions judicieuses, mes collègues Florent Benaych-Georges, Sophie Morier-Genoud, Adnène Benabdesselem, Pierre-Vincent Koseleff, Ramona Anton, Andreas Höring, Pierre Jarraud, Sami Mustapha, ainsi que Christelle Lusso, Alexis Vigot, Patricia Conde Céspedes, Florent Martin, Cyril Labbé, Sylvain Arguillère, Grégory Arbia, Annabelle Collin, Christophe Fizska, Gaël Ladreyt, Matthieu Solnon, François Lê, Daniel Hoehener, Karam Fayad, pour leurs remarques. C'est grâce à Antoine Rauzy, avec qui j'ai eu une discussion très intéressante, que j'ai pensé à ajouter le chapitre sur les courbes paramétrées planes. Enfin, les questions posées par mes étudiants m'ont aussi permis d'enrichir la version initiale !

Je remercie très vivement Sandrine et Frédéric Gachet, pour leur relecture extrêmement minutieuse de la version finale du manuscrit, et leurs remarques très pertinentes ; Chloé Mullaert, qui a accepté de faire l'ultime relecture, ainsi que Laurent Kaczmarek, qui a relu les épreuves après moi.

Un grand merci également à Jean-Pierre Escofier, qui a pris le temps de donner son avis de spécialiste sur cet ouvrage.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction, je demande l'indulgence des lecteurs pour les éventuelles imperfections qui pourraient subsister ; qu'ils n'hésitent pas à me les signaler.

TABLE DES MATIÈRES

Avertissement aux lecteurs

Dans cet ouvrage, qui constitue, également, une introduction à l'algèbre linéaire et au calcul matriciel, certains résultats, dont la démonstration n'est pas considérée comme indispensable à l'apprentissage des techniques de base, sont admis.

Le plan complexe Les nombres complexes

1

Un peu d'histoire

Tout commença avec la fameuse controverse de Cardan, au sujet de la résolution des équations du troisième degré, de la forme $x^3+p\,x=q$.
Jérôme Cardan (1501-1576) publia, dans *Ars magna* en 1545, les formules donnant la solution de ces équations :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+\frac{4\,p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4\,p^3}{27}}}{2}} \tag{1.1}$$

La controverse vint du fait que ces formules furent, également, trouvées par Nicolas Tartaglia (1499-1557), qui en revendiqua la paternité. Il semblerait, d'après ce qu'écrit Cardan, que ces formules furent découvertes, en premier, par Scipione dal Ferro (1465-1526), qui, malheureusement, ne publia jamais ces résultats, et ne les confia qu'à un cercle restreint d'élèves.

À la fin du XVI^e siècle, le mathématicien italien Rafael Bombelli (1526-1572) applique, dans son ouvrage l'*Algebra*, cette formule à l'équation $x^3-15\,x=4$, et obtient :

$$x = \sqrt[3]{2-11\,\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2+11\,\sqrt{-1}} \tag{1.2}$$

où l'écriture « $\sqrt{-1}$ » désigne un nombre, a priori inconnu, dont le carré vaut -1.

Une racine évidente entière de l'équation précédente est, bien sûr, 4. Mais si on recherche les autres racines, la formule obtenue par R. Bombelli prend un tout autre sens ; bien que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{\ }$ ne soit définie que sur $\mathbb{R}^+$, on constate, en utilisant les identités remarquables :

$$(a-b)^3 = a^3-b^3-3\,a^2\,b+3\,a\,b^2 \quad , \quad (a+b)^3 = a^3+b^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2 \tag{1.3}$$

que :

$$(2-\sqrt{-1})^3 = 2^3+\sqrt{-1}-3\times 4\,\sqrt{-1}+3\times 2\,(-1) = 2-11\,\sqrt{-1} \tag{1.4}$$

et :

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3-\sqrt{-1}+3\times 4\,\sqrt{-1}+3\times 2\,(-1) = 2+11\,\sqrt{-1} \tag{1.5}$$

Ainsi :

$$\sqrt[3]{2 - 11\ \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\ \sqrt{-1}} = 4 \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

qui a un sens, et est bien solution de l'équation de départ :

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 0 \tag{1.7}$$

Le fait que -1 puisse être le carré d'un nombre, même « imaginaire », a ainsi commencé à faire son chemin.

Leonhard Euler (1707-1783), s'intéressa également aux nombres complexes. On lui doit, notamment, la formule portant son nom. Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), mit en évidence la propriété de clôture algébrique du corps des nombres complexes.

En 1799, Caspar Wessel (1745-1818), mathématicien danois et norvégien, publie un mémoire où il utilise les nombres complexes pour représenter des lignes géométriques, caractérisées par leur longueur et leur direction.

Les interprétations géométriques, et les applications qui en résultent, se développent, essentiellement, à partir du XIX^e^ siècle, avec, tout d'abord, le chanoine Buée[1], puis Jean-Robert Argand (1768-1822), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) et Augustin Cauchy (1789-1857). Depuis, la recherche sur les nombres complexes connaît un essor considérable : les nombres complexes sont au cœur de la géométrie algébrique et analytique moderne (avec, notamment, les travaux de Jean-Pierre Serre[2], Alexandre Grothendieck[3], et Hans Grauert[4]), puis ceux d'Adrien Douady (1935-2006), professeur à l'Université d'Orsay, qui s'intéressa à l'application aux systèmes dynamiques des nombres complexes, les ensembles de Julia [5], les fractales et ensembles de Mandelbrot [6], ...

Et c'est ainsi que sont nés les *nombres complexes*. Il faut les considérer comme des outils, extrêmement pratiques pour résoudre des problèmes qui, sinon, n'auraient pas de solution.

---

1. Adrien-Quentin Buée, chanoine honoraire de Notre-Dame, mort en 1825 à 80 ans ; versé dans les sciences, il publia des écrits mathématiques ; il est souvent qualifié « d'abbé » par confusion avec son frère l'Abbé Buée, chanoine titulaire de Notre-Dame [3].
2. (1926-), lauréat de la médaille Fields en 1954.
3. (1928-), lauréat de la médaille Fields en 1966, il apparaît comme un refondateur de la géométrie algébrique.
4. Mathématicien allemand (1930-2011), il travailla beaucoup sur les variétés complexes. Ses travaux se placent dans la lignée de ceux d'Hermann Weyl, David Hilbert, Bernhard Riemann.
5. Gaston Maurice Julia (1893-1978), mathématicien français.
6. Benoît Mandelbrot (1924-2010), mathématicien franco-américain.

1.1 Le corps des nombres complexes

Identifions $\mathbb{R}^2$ à un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$; c'est assez naturel, dans la mesure où un point du plan est repéré par deux grandeurs, ses deux coordonnées, abscisse et ordonnée : on est ainsi en dimension 2.

1.1.1 Le plan comme ensemble de nombres complexes

Une interprétation très intéressante et très naturelle pour introduire les nombres complexes est celle de Jean-Robert Argand[7] [4], et dont Jos Leys, Etienne Ghys et Aurélien Alvarez [6] donnent une interprétation extrêmement claire :

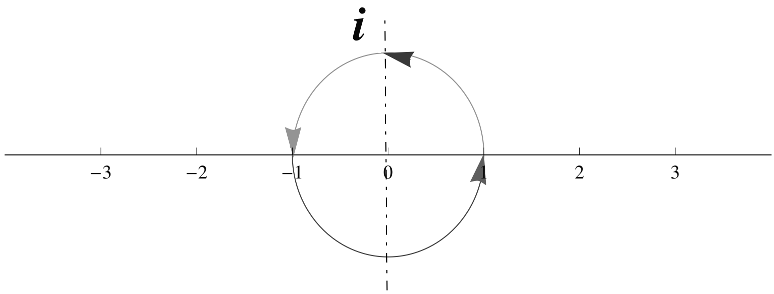

Figure 1.1– La droite réelle

représentons (voir figure 1.1) l'axe des réels par une droite graduée $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$, d'origine O ; la multiplication de 1 par -1 envoie 1 sur -1, qui est l'image de 1 par la symétrie de centre O, que l'on peut aussi considérer comme étant la rotation de centre O, d'angle π.

De même, la multiplication de -1 par -1 envoie -1 sur 1.

Notons i le point image de 1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$: ce point n'est plus sur la droite initiale, mais sur la perpendiculaire à celle-ci passant par l'origine.

Si on va un peu plus loin, et que l'on assimile la multiplication par i à l'opération résultant de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, cela signifie que si on applique cette même rotation au point i, i.e.[8] qu'on le multiplie par lui-même, i.e. i, on obtient le point situé en -1 sur la droite $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$!

Considérer les points du plan comme des quantités sur lesquelles ont peut définir une opération comme la multiplication, permet donc de définir une racine carrée au

7. Jean-Robert Argand (1768-1822), mathématicien suisse, célèbre pour son interprétation géométrique des nombres complexes comme points du plan. Il a également démontré le théorème de d'Alembert-Gauss.

8. Abréviation du latin « id est », qui signifie « c'est-à-dire ».

nombre -1, puisque l'on a alors :

$$i \times i = -1 \tag{1.8}$$

Comme le point i a pour coordonnées $(0, 1)$, il est donc naturel de poser :

$$i = (0, 1) \tag{1.9}$$

Ainsi, à chaque point du plan $\mathbb{R}^2$, de coordonnées $(x, y) = x \times (1, 0) + y \times (0, 1)$, on peut associer le ***nombre complexe***, ou ***nombre imaginaire***

$$z = x + i\,y \tag{1.10}$$

appelé affixe du point M.

Il est clair qu'il est plus facile de manipuler la grandeur $z = x + i\,y$ plutôt que $x \times (1, 0) + y \times (0, 1)$: on choisit donc, pour la suite, la notation la plus simple, i.e. la première !

1.1.2 Définitions et propriétés fondamentales

Définition 1.1.1

On appelle ***ensemble des nombres complexes***, que l'on note $\mathbb{C}$, l'ensemble :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + i\,y \,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \tag{1.11}$$

(qui est aussi l'ensemble des couples de réels de la forme (x, y), si on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$)

Notation

On appelle ***écriture cartésienne*** d'un nombre complexe z sa décomposition sous la forme :

$$z = x + i\,y \tag{1.12}$$

où x et y sont des réels.

Remarque 1.1.1

i est une ***racine carrée complexe*** de -1, car il vérifie[9] :

$$i^2 = -1 \tag{1.13}$$

(« une » racine, car $-i$ est aussi une racine carrée complexe de -1 : $(-i)^2 = -1$)

9. Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ seront développées au paragraphe suivant.

Théorème 1.1.1. *Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit, de manière unique $z = x + i\,y$, où x et y sont des réels.*

Définition 1.1.2

On appelle ***partie réelle*** du nombre complexe $z = x + i\,y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le nombre réel noté $\mathcal{R}e(z)$, et défini par

$$\mathcal{R}e(z) = x \tag{1.14}$$

Définition 1.1.3

On appelle ***partie imaginaire*** du nombre complexe $z = x + i\,y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le nombre réel noté $\mathcal{I}m(z)$, et défini par

$$\mathcal{I}m(z) = y \tag{1.15}$$

Définition 1.1.4

Tout nombre complexe dont la partie réelle est nulle, i.e. de la forme $z = i\,y$, $y \in \mathbb{R}$, est appelé ***imaginaire pur***.

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\,\mathbb{R}$.

1.1.3 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Théorème 1.1.2. *L'ensemble $\mathbb{C}$ peut être muni de deux lois, notées $+$ et $\times$, qui prolongent les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.1.2

On aura donc, pour tous nombres complexes $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z\,z' &= (x + i\,y)\,(x' + i\,y') \\ &= x\,(x' + i\,y') + i\,y\,(x' + i\,y') \\ &= x\,x' + i\,x\,y' + i\,y\,x' - y\,y' \\ &= x\,x' - y\,y' + i\,(x\,y' + y\,x') \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.1.4 Conjugué

Définition 1.1.5

On appelle ***conjugué*** du nombre complexe $z = x + i\,y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le nombre complexe :

$$\bar{z} = x - i\,y \tag{1.17}$$

Propriété 1.1.3. *Pour tout nombre complexe z :*

$$\mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(\bar{z}) \tag{1.18}$$

Propriété 1.1.4. *Pour tout nombre complexe z :*

$$\begin{cases} z + \bar{z} = \ \ 2\,\mathcal{R}e(z) \\ z - \bar{z} = 2\,i\,\mathcal{I}m(z) \end{cases} \tag{1.19}$$

Propriété 1.1.5. *Pour tout nombre complexe z :*

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \tag{1.20}$$

Propriété 1.1.6. *Pour tout nombre complexe z :*

$$z \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \tag{1.21}$$

Propriété 1.1.7. *Pour tout couple (z, z') de nombres complexes :*

$$\begin{cases} \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \\ \ \ \overline{z\,z'} \ \ = \ \ \bar{z}\,\bar{z'} \end{cases} \tag{1.22}$$

Remarque 1.1.3

Il résulte de la propriété précédente que, pour tout nombre complexe z :

$$\overline{-z} = -\bar{z} \tag{1.23}$$

et tout entier naturel n :

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n \tag{1.24}$$

1.1.5 Représentation géométrique des nombres complexes

On se place, dans ce qui suit, dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

À tout nombre complexe $z = x + i\,y$, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans le plan.

Définition 1.1.6

On appelle ***image*** du nombre complexe $z = x + i\,y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le point M de coordonnées (x, y).

Définition 1.1.7

On appelle ***affixe*** du point M de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le nombre complexe $aff(M) = z_M = x + i\,y$.

Définition 1.1.8

On appelle ***affixe*** du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$.

Remarque 1.1.4

L'affixe du point M de coordonnées (x, y) est aussi celle du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriété 1.1.8.

1. *Pour tout couple de vecteurs* $(\vec{u}, \vec{v})$ *du plan :*

$$aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v}) \tag{1.25}$$

2. *Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan, et tout réel* λ *:*

$$aff(\lambda\,\vec{u}) = \lambda\,aff(\vec{u}) \tag{1.26}$$

Définition 1.1.9

On appelle ***module*** du nombre complexe $z = x + i\,y$,
$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et on note $|z|$, le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition 1.1.10

On appelle ***argument*** du nombre complexe non nul $z = x + i\,y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, toute mesure, en *radians*, de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$, où M est le point d'affixe z.

On notera $arg(z)$ une telle mesure.

L'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'appelle ***l'argument principal***.

Remarque 1.1.5

Le nombre complexe nul 0 ne possède pas d'argument.

Remarque 1.1.6

Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments ! Si θ est un argument du nombre complexe $z \in \mathbb{C}^\star$, les autres arguments de z sont exactement les réels de la forme $\theta + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

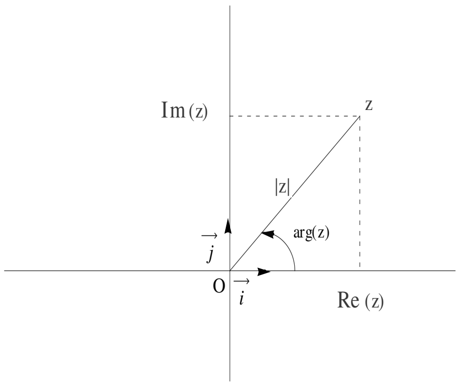

Figure 1.2 – Représentation géométrique d'un nombre complexe non nul

1.1.6 Forme polaire

Notation

Pour tout nombre réel θ, on pose :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta \tag{1.27}$$

Propriété 1.1.9. *Tout nombre complexe z de module 1 peut s'écrire sous la forme :*

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta \tag{1.28}$$

où θ est un réel, unique à 2π près, tel que :

$$\theta = arg(z) \quad [2\pi] \tag{1.29}$$

où l'écriture $[2\pi]$ signifie **modulo** *2π, i.e. :*

$$\theta = arg(z) + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.30}$$

Propriété 1.1.10. *Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un réel strictement positif, r, et un réel, θ, tels que z s'écrive sous la forme suivante, appelée **forme polaire** :*

$$z = r\,e^{i\theta} = r\,\cos\theta + i\,r\,\sin\theta \tag{1.31}$$

où θ est un réel, unique à 2π près :

$$\theta = arg(z) \quad [2\pi] \tag{1.32}$$

Propriété 1.1.11. *Pour tout nombre complexe z non nul, s'il existe un réel strictement positif, r, et un réel θ tels que :*

$$z = r\,e^{i\theta} = r\,\cos\theta + i\,r\,\sin\theta \tag{1.33}$$