

Table des matières

Préface et Introduction	3
Légende des abréviations - Notations	12

Première Partie

Outils mathématiques pour la mécanique	15
--	----

Chapitre 1. Algèbre tensorielle	16
---------------------------------------	----

1. Algèbre vectorielle	16
1.1. Changement de base	17
2. Les tenseurs	20
2.1. Transformation d'une matrice par changement de repère	21
2.2. Définition d'un tenseur	21
2.3. Exemple de changement de repère : les angles d'Euler	23
2.4. Construction des tenseurs à partir du produit cartésien	24
3. Espace vectoriel des tenseurs du second ordre	26
4. Algèbre tensorielle dans un espace non euclidien	28
4.1. Changement de la variance d'un tenseur	28
4.2. Critère de tensorialité	29
4.3. Opérations sur les tenseurs	30
5. Exemples de tenseurs utiles dans les calculs	31
6. Directions principales et valeurs propres d'un tenseur d'ordre deux	33
6.1. Cas des tenseurs symétriques (ou dits autoadjoints)	35
6.2. Décomposition canonique d'un tenseur en parties symétrique et antisymétrique	37
6.3. Décomposition d'un tenseur en partie sphérique et déviateur	37

Chapitre II. Éléments de calcul différentiel sur les variétés	38
---	----

1. Rappels de topologie	38
2. Calcul différentiel	41
2.1. Applications différentiables	41
2.2. Différentielle et dérivée directionnelle	43
2.3. Différentiabilité et dérivées partielles	44
3. Application : changement de variables dans les intégrales	45
3.1. Théorème d'inversion locale	45
3.2. Approximation linéaire et quadratique	46
3.3. Différentielles d'ordre supérieur	47
3.4. Formules de Taylor	48
4. Géométrie différentielle sur les variétés	48
4.1. Variétés différentiables	48
4.2. Applications différentiables	53
4.3. Formes différentielles	55
4.4. Application : la mécanique symplectique	56
4.5. Généralisation des 1-formes : algèbre de Grassmann	57
4.6. Applications ; opérateurs différentiels	60
5. Intégration des formes différentielles et applications	61
5.1. Calcul pratique	61
5.2. Théorème de Stokes	63
5.3. Application: formules de Green-Riemann, Ostrogradski et Stokes	64
5.4. Éléments de la théorie de l'homologie - Applications	65
5.5. Potentiel scalaire et potentiel vecteur	67

Chapitre III. Analyse tensorielle	69
1. Repère naturel	69
2. Champs de tenseurs dans un espace non euclidien	70
2.1. Dérivation covariante	71
2.2. Transport parallèle, connexion et dérivation covariante	72
2.3. Géodésiques	75
2.4. Dérivée covariante de champs de tenseurs	76
2.5. Transformation des coefficients de Christoffel	77
2.6. Espaces à connexion métrique	77
2.7. Interprétation géométrique des tenseurs de courbure et de torsion	78
2.8. Connexion de Lévi-Civita	82
3. Opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes: définition intrinsèque	84
3.1. Application : opérateurs différentiels en coordonnées sphériques	85
3.2. Signification des opérateurs divergence, rotationnel	87
4. Exemples d'utilisation des tenseurs	88
4.1. Tenseur des contraintes de Cauchy	88
4.2. Effet piézo-électrique	89
4.3. Thermique	90
4.4. Électromagnétisme	90
4.5. Relativité générale	91
Références bibliographiques	93

Deuxième partie

Mécanique des milieux continus : formulation locale	95
--	-----------

Préface	96
----------------------	-----------

Chapitre IV. Cinématique et statique	97
---	-----------

1. Notion de milieu continu déformable	97
2. Cinématique et tenseur des déformations	98
2.1. Définition du mouvement : représentation eulérienne / lagrangienne	98
2.2. Gradient de déformation	100
2.3. Déformations - variations de longueur et d'angle	102
2.4. Tenseurs vitesses de déformation	107
3. Lois de conservation	108
3.1. Dérivées particulières d'intégrales de surface et de volume	108
3.2. Conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie	109
3.3. Statique (étude des efforts)	110
3.4. Principe des puissances virtuelles	111
4. Premier principe : conservation de l'énergie	114
4.1. Forme globale de la conservation de l'énergie	115
4.2. Conservation de l'énergie : forme locale	116

Chapitre V. Lois de comportement	118
---	------------

1. Forme locale du second principe : inégalité de Clausius	118
2. Principes de l'écriture des lois de comportement	119
2.1. Objectivité des grandeurs physiques et universalité des lois de comportement	120
2.2. Objectivité des grandeurs physiques	124
2.3. Construction des densités d'énergie - lois hyperélastiques	127
2.4. Quelques lois hyperélastiques fréquemment utilisées	129
3. Exemple de cinématique en transformations finies : le cisaillement simple	131
4. Thermoélasticité	132
5. Comportement des milieux fluides : une brève esquisse	132

6.	Le schéma linéaire élastique classique : loi de Hooke	135
6.1.	Élasticité linéarisée : déformations en petites transformations	135
6.2.	Tenseur des petites déformations	136
6.3.	Axiomes du schéma élastique classique	137
6.4.	Module d'Young et coefficient de Poisson	138
6.5.	Comparaison avec l'élasticité linéarisée	139
6.6.	Thermoélasticité linéaire	140
Chapitre VI. Résolution d'un problème d'élasticité		143
1.	Méthode des déplacements: équations de Navier (en statique)	143
2.	Méthode des contraintes : équations de compatibilité de Beltrami	145
2.1.	Théorème de compatibilité cinématique	145
2.2.	Compatibilité cinématique en grandes transformations	147
2.3.	Conditions de Beltrami	151
Annexe 1 : Dérivée matérielle d'intégrales de volume, de surface et de ligne		153
Annexe 2 : Mesures de déformation, vitesses de déformation, et de contraintes		156
Annexe 3 : Problème d'élasticité traité : sphère creuse sous pression		158
Références bibliographiques		160
Chapitre VII. Problèmes de contact plan et tridimensionnel		161
1.	Solution de Michell d'un problème d'élasticité plane	161
2.	Application : cavité soumise à une tension à l'infini	168
3.	Solution de Flamant du problème de contact plan	169
3.1.	Plan semi-infini soumis à une force ponctuelle	171
3.2.	Problèmes de contact sans frottement	172
3.3.	Cas particuliers : poinçon plan et problème de Hertz	174
4.	Problèmes de contact 3D	176
4.1.	Indentation d'un plan semi- infini par un poinçon rigide	178
4.2.	Exemple : le problème de Hertz	180
Références bibliographiques		182

Troisième partie

Homogénéisation et formulations variationnelles en mécanique 183

Chapitre VIII. Méthodes d'homogénéisation en mécanique		184
1.	Méthodologie du changement d'échelle	184
1.1.	Introduction	184
1.2.	Séparation des échelles	185
1.3.	Représentation, localisation et homogénéisation	186
2.	Théorie des modules effectifs	191
2.1.	Problèmes de localisation	191
2.2.	Tenseurs effectifs	194
2.3.	Propriétés variationnelles	195
2.4.	Approximations de Voigt et Reuss	197
3.	Homogénéisation de composites à microstructure périodique	200
3.1.	Cadre mathématique de l'homogénéisation périodique	200
3.2.	Mise en œuvre : cas de l'élasticité unidimensionnelle	201
3.3.	Homogénéisation de problèmes aux limites elliptiques	205
4.	Milieux continus généralisés : un bref aperçu	206
4.1.	Milieu de Cosserat	208
4.2.	Théorie du second gradient	208
4.3.	Équations constitutives d'un milieu de Cosserat isotrope	209
Références bibliographiques		211

Chapitre IX. Éléments de calcul des variations -	
Formulation faible de problèmes elliptiques	212
1. Motivations	212
2. Bref historique	212
3. Extréma de fonctions - Points critiques	214
3.1. Notion d'extrémum	214
3.2. Points critiques d'une fonction	216
3.3. Nature des points critiques	217
4. Extréma liés de fonctions de plusieurs variables	218
5. Extréma de fonctionnelles - Équations d'Euler-Lagrange	220
5.1. Présentation de la problématique	220
5.2. Variation générale de l'intégrale d'action	222
5.3. Équation d'Euler-Lagrange	224
5.4. Conditions aux limites naturelles et essentielles	225
5.5. Exemples	226
5.6. Cas particuliers	228
5.7. Généralisation	229
6. Extréma de fonctionnelles comportant des liaisons	232
7. Conditions suffisantes de minimum de l'intégrale d'action	235
8. Principes d'extrémum en mécanique	237
8.1. Cas de l'élasticité linéarisée	237
8.2. Principes variationnels généralisés	243
8.3. Principes d'extrémum en élastoplasticité	246
8.4. Extension des principes variationnels en grandes transformations	246
8.5. Principes d'extrémum en hyperélasticité	247
8.6. Formulations variationnelles en vitesse	249
9. Problèmes aux limites elliptiques : cadre théorique et approximation variationnelle	250
9.1. Formulations forte et faible	251
9.2. Formulation variationnelle de problèmes elliptiques	254
9.3. Exemple : répartition de la chaleur dans un barreau cylindrique	259
10. Modèles de structures tissées	260
10.1. Modèle discret du tissu	261
10.2. Énergie potentielle du treillis	262
10.3. Simulation du drapé	264
Références bibliographiques	265

Chapitre X. Modèles d'interfaces micropolaires	
1. Présentation	267
2. Formulation variationnelle de l'équilibre du joint collé	267
2.1. Loi de comportement des constituants	268
2.2. Formulation variationnelle	269
2.3. Estimations des champs de déplacement et de microrotation	271
3. Loi de contact de l'interface	275
4. Effets des échelles de longueur caractéristiques sur la cinématique de l'adhésif	280
Références bibliographiques	283