

Table des matières

Introduction et mode d'emploi	9
Ch. 1 : La notion d'équation	17
I. Deux manières de définir un ensemble	17
II. Notion d'équation, injectivité et surjectivité, application réciproque	18
A. Equations	18
B. Injection, surjection, bijection, application réciproque	20
C. Deux problèmes importants concernant équations et fonctions réciproques	23
III. Le modèle général de l'équation linéaire : cinq exemples de référence	32
A. Le modèle général de l'équation linéaire	32
B. Cinq exemples de référence	34
IV. Définir un ensemble géométrique par des équations	39
A. Le cas général	39
B. Le cas des équations linéaires	41
Ch. 2 : Compléments sur les nombres complexes	45
I. Un peu d'histoire en guise d'introduction : nombres complexes, équations, polynômes	46
A. Des exercices inspirés de l'histoire	47
B. Indications pour la solution des exercices	50
C. Le "miracle" des calculs des mathématiciens italiens... n'en est pas un	58
II. Différentes définitions et différentes écritures des nombres complexes	61
A. Quelques définitions des nombres complexes	61
B. Les différents registres d'écriture des nombres complexes, nombres complexes de module 1 et racines n-èmes de l'unité	64
III. Les nombres complexes comme outils en géométrie ou en algèbre	70
A. Des rappels sur les nombres complexes et la géométrie	71
B. Des types de problèmes de géométrie où les complexes sont utiles : alignement, triangle, configurations, lieux, études liées à des homographies	77
C. Utilisation de la géométrie des complexes pour étudier des questions d'algèbre des polynômes à coefficients complexes	87

Ch. 3 : Le nombre π entre algèbre, géométrie et analyse	91
I. La limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ en classe de première : longueur d'un arc et convexité dans le plan	91
II. La limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ en classe de première : l'aire du secteur de cercle et la division des arcs	93
III. Pourquoi le périmètre du cercle de rayon 1 est-il le double de son aire ? Le même nombre π ?	96
IV. La relation $L = 2S$: une preuve presque géométrique	98
V. Le raisonnement par "exhaustion" d'Archimède pour montrer la relation $L = 2S$...	99
VI. Le point de vue du XX ^e siècle	102
A. L'introduction des fonctions trigonométriques par les séries entières	102
B. L'introduction des fonctions trigonométriques par la fonction arctangente, primitive nulle en 0 de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$	102
VII. Un autre point de vue sur le nombre π : la période d'un homomorphisme continu de \mathbb{R} dans \mathbb{T}	104
A. Conditions nécessaires vérifiées par un tel homomorphisme	104
B. Comment montrer l'existence d'un homomorphisme continu de \mathbb{R} dans \mathbb{T} ?	107
C. Attention : il existe beaucoup d'homomorphismes de groupe de \mathbb{R} dans \mathbb{T} , dont le noyau est \mathbb{Z} , mais non continus	108
VIII. Calculer des valeurs approchées de π	109
Ch. 4 : La convexité	115
I. Fonctions et ensembles convexes : définitions et propriétés fondamentales	116
A. Fonctions convexes sur un intervalle réel	116
B. Ensembles convexes de la droite, du plan, de l'espace	120
C. Relations entre ensembles convexes et fonctions convexes	122
II. Fonctions et ensembles convexes : quelques indications sur les démonstrations ...	125
III. Quelques grandes idées sur la convexité et son utilisation	131
A. Quelques idées importantes	131
B. Quatre techniques de base pour utiliser la convexité	133
IV. Quelques exercices sur les fonctions convexes	133
V. Longueurs, périmètres et convexité	140
A. Définition et existence	140
B. La formule de Cauchy pour le périmètre d'un corps convexe	143

VI. Aires et convexité	148
A. Aire d'un corps convexe	148
B. Le calcul de l'aire d'un corps convexe	149
C. L'aire des polygones convexes inscrits ou circonscrits à un cercle : des inégalités	150
D. La formule de Steiner-Minkowski sur l'aire de $C + B^*(O, \epsilon)$	151
E. Le problème du sandwich	153
F. Convexes et réseaux plans	156
VII. Quelques résultats supplémentaires : l'inégalité isopérimétrique, le théorème de Brunn-Minkowski	158
A. La concavité de la racine carrée de l'aire : le théorème de Brunn-Minkowski	158
B. L'inégalité isopérimétrique	162
VIII. Où se cache la convexité dans les programmes des lycées et collèges ?	166
A. Convexité et axiomes de base de la géométrie au collège	167
B. Les polygones convexes au collège et au lycée	167
C. La convexité du cercle au collège et au lycée	167
D. La longueur de l'arc de cercle et les fonctions trigonométriques en première	168
E. Recherche du maximum de fonctions linéaires sous des contraintes linéaires, en terminale	168
F. Calcul de volumes en terminale	168
Ch. 5 : Aires, intégrales et primitives, un cheminement de la géométrie à l'analyse, inspiré de l'histoire	171
I. Cheminement historique	172
A. Galilée et la chute des corps	172
B. La spirale d'Archimède et la somme $\sum_1^n k^2$	173
C. Cavalieri, Fermat et l'aire "sous les fonctions puissances"	174
D. L'hyperbole, Grégoire de Saint-Vincent et le logarithme	176
II. Aire, intégrale et primitive : quels rapports ?	177
III. Sens de la relation primitive-intégrale en terminale scientifique ; le problème de l'additivité et les indivisibles de Cavalieri	180
A. Primitives et intégrales en terminale	180
B. Quelques activités autour de la méthode des indivisibles	183

Ch. 6 : Le problème des primitives des fonctions continues :

une solution directe	187
I. Primitives d'une fonction, propriétés ; primitive entre deux points	187
II. Approximation globale d'une fonction continue par des fonctions simples	190
III. Le théorème fondamental sur les primitives	192

Ch. 7 : Les grandeurs géométriques, physiques... et leur formalisation

et calcul par les procédures "intégrale" et "dérivée-primitive"	197
I. La notion de grandeur	197
A. Qu'est-ce qu'une grandeur ?	197
B. Mesurer une grandeur	198
C. Caractériser une grandeur par une relation numérique ponctuelle ou locale	198
II. La procédure "dérivée-primitive"	200
A. En quoi consiste cette procédure ?	200
B. La procédure dérivée-primitive et le calcul des surfaces et des volumes	205
III. La procédure intégrale	211
A. Quel est le problème ?	211
B. La procédure intégrale	213
C. Une classe de fonctions Darboux-intégrables	215
D. Un exemple d'application à un calcul d'aire en coordonnées polaires	217
E. On retrouve l'existence des primitives des fonctions continues	218
F. Conclusion sur la modélisation par l'intégrale	218

Ch. 8 : Valeur moyenne d'une fonction, valeurs moyennes

d'une grandeur	223
I. Valeur moyenne d'une fonction	223
A. Passage d'un échantillonnage discret à une version continue	223
B. Moyenne comme constante déterminant la même aire que le graphe de f sur $[a, b]$	224
C. Vision barycentrique de la moyenne : on pondère les valeurs	224
D. Moyenne comme constante minimisant l'erreur quadratique	225
II. Moyenne d'une fonction par rapport à une fonction densité	226
III. Valeur moyenne d'une grandeur : problèmes de modélisation	227

Ch. 9 : Aire, volume, mesure de Lebesgue des compacts	233
I. L'équidécomposabilité de polygones de même aire	234
II. Les compacts quarrables du plan	238
A. Objectifs et contraintes	238
B. Les définitions de base	238
C. Les propriétés de l'aire des compacts quarrables	239
D. L'aire du disque	240
E. L'aire du parallélogramme comme déterminant	241
III. Les compacts cubables de l'espace	241
A. Définitions et résultats	241
B. Le volume du tétraèdre	242
C. Le volume du tétraèdre dans les programmes de première de 1950	243
D. Le volume du parallépipède comme déterminant	245
IV. La mesure de Lebesgue d'un compact du plan	246
A. La mesure des compacts du plan	246
B. Invariance de la mesure de Lebesgue par les isométries	250
C. Mesure des sous-graphes et intégrales des fonctions continues	251
D. L'existence de compacts du plan non quarrables	252
E. L'effet des bijections affines sur la mesure des compacts	254
F. Rapports entre les mesures des compacts dans des plans différents de l'espace	255
V. La mesure de Lebesgue d'un compact de l'espace	255
A. Mesure d'un cylindre droit à base dans un plan de coordonnées	256
B. Invariance de la mesure des compacts par les isométries	256
C. L'effet des bijections affines sur la mesure des compacts de l'espace	257
D. Cubabilité et mesure de Lebesgue	258
Appendice au ch. 9 : la non-équidécomposabilité du cube et du tétraèdre régulier de même volume	261

Annexe 1 : Les entiers et la récurrence, ensembles finis et infinis, problèmes de dénombrement	265
I. \mathbb{N} et le raisonnement par récurrence	265
A. La récurrence	265
B. Existence et unicité des suites définies par récurrence	270
C. La construction par récurrence	271

II. Ensembles finis et infinis	273
A. Ensembles finis, cardinal ou nombre d'éléments d'un ensemble fini	273
B. Ensembles infinis	276
C. Ensembles dénombrables	279
III. L'analyse combinatoire	282
A. Des résultats généraux de base	284
B. Problèmes de modélisation	292
C. Retour de la modélisation vers les mathématiques	296

Annexe 2 : Quelques exemples d'intervention du numérique en géométrie, et autres remarques sur la géométrie du collège	299
I. Inégalité triangulaire et intersection de deux cercles : un piège au collège	299
II. Réciproques de quelques théorèmes caractérisant une propriété géométrique par une égalité numérique	301
III. Mesures des angles du plan	303
IV. Les oubliés du collège	304

Annexe 3 : Le point sur les nombres réels	307
I. Une ébauche de construction, les propriétés de \mathbb{R}	308
A. Différentes approches possibles pour une construction	308
B. Une ébauche de construction, par les développements décimaux illimités	311
C. Les propriétés essentielles de \mathbb{R}	318
II. Nombres rationnels, irrationnels, transcendants	322
A. La non-dénombrabilité de \mathbb{R}	322
B. Les nombres irrationnels	323
C. Nombres algébriques, nombres transcendants	327
III. Nombres constructibles	330