j'intègre

T^le

MATHS

SPÉCIALITÉ ET EXPERTES

Cahier de calcul

Conçu par un collectif
de professeurs de lycée
et classe prépa,
**sous la direction
de Colas Bardavid**

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture :
Nicolas Wiel - Pierre-André Gualino (graphiste)

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici

http://dunod.link/prepassc

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés
pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé
afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70%
de nos livres en France et 25% en Europe
et nous mettons tout en œuvre pour augmenter
cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos
ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086419-5

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

Conception et coordination

Colas Bardavid

Aide à la coordination

Jérôme Trochon

Équipe des auteurs

Mélissa Baillœuil-Inglart
Romain Basson
Ménard Bourgade
Van Bien Bui
Alain Camanes
Carole Chabanier
Mathilde Colin de Verdière
Geneviève Davion
Éliane Gayout
Christopher Goyet
Hélène Gros
Benjamin Groux
Jason Lapeyronnie
François Laurent
Blaise Le Meaux
Steven Lu
Lionel Magnis
Quang-Thai Ngo
Anthony Ollivier
Alan Pellé
Nicolas Popoff
Jean-Philippe Spriet

Relecture

Rémy Allou, Thibaut Deheuvels, Anne-Lucie Delvallez, Pierre Cauchois, Anne Foubert, Jérôme Gärtner, Éliane Gayout, William Gregory, Jonathan Harter, Marie Hézard, Sandrine et Hadrien Larôme, Landry Lavoine, Arthur Meyer, Pedro Montoya, Inès Nebzry, Sébastien Pellerin

Illustrations

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY Studio (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).
Le pictogramme du bateau a été créé par Mello (The Noun Project).

Sommaire

Introduction ... vii
Conventions suivies dans ce livre ... ix

Limites
- [ ] Fiche 1. Limites de fonctions ... 3
- [ ] Fiche 2. Limites de suites ... 9

Logarithme
- [ ] Fiche 3. Propriétés algébriques du logarithme ... 15
- [ ] Fiche 4. Dérivée du logarithme ... 19

Fonctions trigonométriques
- [ ] Fiche 5. Fonctions trigonométriques ... 23
- [ ] Fiche 6. Dérivation des fonctions trigonométriques ... 31

Dérivation
- [ ] Fiche 7. Révisions sur la dérivation ... 35
- [ ] Fiche 8. Dérivée des fonctions composées ... 39

Primitives
- [ ] Fiche 9. Primitives I ... 44
- [ ] Fiche 10. Primitives II ... 48

Équations différentielles
- [ ] Fiche 11. Équations différentielles ... 53

Intégration
- [ ] Fiche 12. Intégration I ... 56
- [ ] Fiche 13. Intégration II ... 58
- [ ] Fiche 14. Intégration III ... 61
- [ ] Fiche 15. Intégration par parties I ... 65
- [ ] Fiche 16. Intégration par parties II ... 68
- [ ] Fiche 17. Intégration des fonctions trigonométriques ... 72

Combinatoire et dénombrement

- [ ] Fiche 18. Cardinaux et coefficients binomiaux 76
- [ ] Fiche 19. Dénombrement 82

Probabilités

- [ ] Fiche 20. Généralités sur les probabilités 88
- [ ] Fiche 21. Autour de la loi binomiale 95

Géométrie dans l'espace

- [ ] Fiche 22. Droites dans l'espace 102
- [ ] Fiche 23. Produit scalaire dans l'espace 107
- [ ] Fiche 24. Plans et sphères dans l'espace 114

Maths expertes : Nombres complexes

- [ ] Fiche 25. Calcul algébrique complexe 121
- [ ] Fiche 26. Équations de degré 2 126
- [ ] Fiche 27. Formes exponentielles 130
- [ ] Fiche 28. Formule du binôme 134
- [ ] Fiche 29. Complexes et géométrie 140

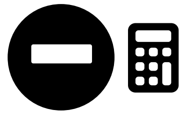
Maths expertes : Matrices

- [ ] Fiche 30. Calcul matriciel I 145
- [ ] Fiche 31. Calcul matriciel II 150
- [ ] Fiche 32. Matrices inversibles 154

Maths expertes : Arithmétique

- [ ] Fiche 33. Congruences 159
- [ ] Fiche 34. PGCD 163

Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice est
strictement et formellement interdit.



Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde :
le but même de ce livre est de fournir à l'étudiant un outil pour s'entraîner au calcul.

Introduction

Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.
On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.
On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose d'essentiel.

Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

  Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.
  C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.
  C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.
  Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

  Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

  Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.
- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

  Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, en toute autonomie.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

Des pictogrammes

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des bateaux pour les exercices de calculs généraux ;
- des horloges pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées pour les exercices plus avancés.

Des cadres pour les réponses

Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`*. Merci en nous contactant de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à gauche de chaque fiche.*

Conventions suivies dans ce livre

Polynômes

Dans ce cahier de calcul, nous avons choisi de noter les polynômes avec la lettre « X ».

- Ainsi, au lieu de considérer, par exemple, la fonction

$$t \longmapsto 5t^4 - 3t^3 + 25t^2 + 10t - 1,$$

  on considérera le polynôme

$$5X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 10X - 1.$$

- On notera généralement les polynômes P ou Q. Par exemple, on peut poser $P = 5X^2 - 3X - 2$.
- Les polynômes peuvent être évalués en un nombre, comme les fonctions.
  Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $P(t)$.
  En reprenant l'exemple précédent, on a

$$P(1) = 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0.$$

  On dit alors que 1 *est une racine de P.*

Définition des variables

Dans certains exercices, nous avons choisi, par souci de clarté et de concision, de ne pas préciser à quel ensemble appartiennent les variables.

- Par exemple, on pourra demander de simplifier l'expression

$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{1-x}{5-x}$$

  sans préciser qui est la variable x.
- Dans ce cas, il faudra toujours considérer que la variable x est implicitement définie et appartient au bon ensemble.
- Dans l'exemple précédent, il est sous-entendu que x est un nombre réel différent de -3 et 5.

Bons calculs à vous !

Énoncés

Limites de fonctions

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{x^3+x^2}{x}$ ....

b) $x^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$ ....

c) $\dfrac{x^3+x^2+x^4}{x^2}$ ....

Calcul 1.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x}$ ....

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x}}$ ....

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{-x}}$ ....

d) $\mathrm{e}^{x^2+x+1} \times \mathrm{e}^{-x^2+3x}$ ....

Fractions, polynômes et racines

Calcul 1.3 — Détection de forme indéterminée (I).

Pour chaque expression suivante, dire s'il s'agit d'une forme indéterminée, auquel cas on ne cherchera pas à calculer la limite et on écrira « FI » dans le cadre-réponse ; s'il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, on donnera la limite en question.

a) $e^x - x$, en $+\infty$ ....

b) $e^x - x$, en $-\infty$ ....

c) $\dfrac{\ln(x)}{x}$, en $+\infty$ ....

d) $\dfrac{\ln(x)}{x}$, en 0^+ ....

Calcul 1.4 — Détection de forme indéterminée (II).

Même exercice.

a) $\dfrac{\cos(x)}{x}$, en 0^+ ....

b) $\dfrac{\sin(x)}{x}$, en 0^+ ....

c) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\dfrac{\pi}{2}^-$ ....

d) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\dfrac{\pi}{2}^+$ ....

Calcul 1.5

Déterminer les limites suivantes.

On mettra en facteur des termes dominants pour lever l'indétermination.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-x}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2}{x^2+x}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x^2+x+1}$ ....

Calcul 1.6

Même exercice.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+2}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+3x^3}}{-2x^2+7}$ ....

Calcul 1.7

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+2)^2-x^2\right)$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-x(x+1)\right)$

Calcul 1.8

Chercher des facteurs communs afin de simplifier la fraction, pour lever l'indétermination, puis donner la limite des expressions suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{4x^2-1}$ ....

Calcul 1.9

Même exercice.

On cherchera au préalable à factoriser les polynômes au numérateur et au dénominateur.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}$ ....

Calcul 1.10 — Une identité remarquable de degré 3.

En utilisant la formule
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$
valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ ....

Calcul 1.11 — En utilisant la quantité conjuguée (I).

On souhaite déterminer la limite de $\sqrt{x^2+1} - x$ en $+\infty$.

a) A-t-on $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$? ....

b) Développer $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ ....

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ....

Calcul 1.12 — En utilisant la quantité conjuguée (II).

En adaptant la technique précédente pour lever l'indétermination, calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ ....

Croissances comparées

Calcul 1.13 — En factorisant (I).

Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3\mathrm{e}^x$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - x^8}{x+1}$ ....

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x-7}+3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}$ ....

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+x}$ ....

Calcul 1.14

En posant $X = \dfrac{1}{x}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$ ....

Calcul 1.15 — En factorisant (II).

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x)$ ....

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$ ....

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ ....

d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^2 - 7}{3 + 2\ln(x)}$ ....

Calcul 1.16 — Une limite classique.

Quelle est la limite de $x \mapsto x\ln(x)$ en 0^+ ?

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) 0 (d) 1

....

Calcul 1.17 — Une puissance de puissance.

Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

a) Que vaut x^x pour $x = \dfrac{1}{2}$? ....

b) Que vaut x^x pour $x = \dfrac{1}{4}$? ....

c) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} x^x$ ....

Calcul 1.18

En mettant en facteur l'exponentielle, déterminer $\lim_{x \to +\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + 4x) - x)$ ....

Calcul 1.19

a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\ln(x)} - \ln(x)\right)$ ....

b) En écrivant $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$, en déduire $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}}{x}$ ....

Autour du taux d'accroissement

Calcul 1.20 — **Limites de taux d'accroissement.**

Rappelons que si une fonction f est dérivable en a, alors on a $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).}$

Par exemple, pour déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$, on introduit $f : x \longmapsto e^x$, et on reconnaît $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = f'(0) = e^0 = 1.$$

En reconnaissant des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.21 — **Autour du taux d'accroissement de l'exponentielle.**

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. Calculer :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ ....

Calcul 1.22 — **D'autres taux d'accroissement.**

En faisant apparaître des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+2x)}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)}$ ....

Calcul 1.23 — **Une limite farouche.**

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} - \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}$ ....

Calcul 1.24 — **Une limite remarquable ?**

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

a) Pour $a \neq 0$ fixé, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$ ....

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ....

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit a^x en posant $\boxed{a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.}$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Si vous trouvez 1 ou $+\infty$, vous avez faux ! ....

Calcul 1.25 — **Avec des formules de trigonométrie (I).**

Pour ce calcul, il faut connaître les formules de duplication du sinus et du cosinus.

a) Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ ....

b) En utilisant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$ ....

Calcul 1.26 — **Avec des formules de trigonométrie (II).**

Pour ce calcul, il faut connaître les formules de duplication du sinus et du cosinus.

Déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(2x)}$ ....

Réponses mélangées

$+\infty$	$+\infty$	1	1	FI	$+\infty$	3	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x+1+x^2$	1	oui	
1	$-\infty$	3	2	1	$-\infty$	e^x	1	-1	0	$+\infty$	0	$-\infty$
x^2+1	$+\infty$	e^{2x}	e^{3x+1}	$+\infty$	1	a	$+\infty$	0	$\mathrm{e}^{-7}+3$	12		
$1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.	0	x^2+x	-2	c	$+\infty$	2	FI	e	$-\infty$	2		
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	FI	e^{4x+1}

► Réponses et corrigés page 168

Limites de suites

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 2.1 — Quelques équations.

Donner la solution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $\dfrac{10}{3}x + \dfrac{5}{9} = 0$ ....

b) $\dfrac{3x+2}{-2x+3} = 1$ ....

c) $\dfrac{x+5}{x+2} = \dfrac{2x+5}{2x+1}$ ....

Calcul 2.2 — Quelques inéquations.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

On donnera la solution sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $\dfrac{2}{7}x - 6 > 0$ ....

b) $(2x-1)(2-3x) \leqslant 0$ ....

c) $\dfrac{2x-12}{1-x} \geqslant 0$ ....

d) $\dfrac{x^2-9}{x} \leqslant 0$ ....

Théorèmes de comparaison

Calcul 2.3 — Autour de $(-1)^n$.

Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle admet une limite (finie ou infinie).

a) $(-1)^n$ ....

b) $(-1)^{2n+1}$ .....

c) $n(-1)^n$ ....

d) $n + (-1)^n$ ....

e) $2n(-1)^n$ .....

f) $n(-1)^{2n}$ .....

g) $\cos((-1)^n\pi)$ ..

h) $\sin((-1)^n\pi)$ ..

Calcul 2.4

Quelle est la limite des suites définies par les expressions suivantes ?

a) $\left(\dfrac{13}{17}\right)^n \cos(n)$

(a) $-\infty$ (b) $\dfrac{13}{17}$ (c) 1 (d) 0 (e) $+\infty$

b) $(9 + (-1)^n) \times (0{,}2)^n$

(a) -10 (b) -2 (c) -1 (d) 0 (e) 1 (f) $1{,}8$

c) $\dfrac{n + \sin(n\pi/2)}{3n}$

(a) -1 (b) 0 (c) $1/3$ (d) $1/2$ (e) 1 (f) 3

Calcul 2.5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^2 - a\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{a}{n} \leqslant u_n \leqslant a + \frac{a}{n}.$$

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a + \frac{a}{n}$, en fonction de a

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(a^2 - a\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{a}{n}\right)$, en fonction de a

c) Pour quelle valeur de a le théorème des gendarmes permet-il d'affirmer que la suite $(u_n)_n$ converge ?

d) Dans ce cas, combien vaut alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$?

Calcul 2.6 — Des inégalités.

Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$.

a) Lequel des encadrements suivants est-il vérifié ?

(a) $1 \leqslant u_n \leqslant 1$

(b) $\dfrac{n+1}{n-1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n-1}{n+1}$

(c) $\dfrac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$

(d) $\dfrac{n-1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$

(e) $\dfrac{n-2}{n-1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+2}{n-1}$

b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_n$?

Calcul 2.7 — **Une inégalité très costaude.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\frac{na+\sqrt{n}+n}{n}\right)^6 - 1 - \frac{a^6}{n} \leqslant u_n \leqslant \left(a+\frac{a}{n}\right)^6 + \frac{2an^2+7n+18}{n^2+n+1}.$$

a) Quel est le degré du polynôme $(X+1)^6 - X^6 - 2X - 1$? ....

On note $P = (X+1)^6 - X^6 - 2X - 1$. Calculer :

b) $P(0)$ ....

c) $P(-1)$ ....

d) $P\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ .....

e) Déterminer a, b, c tels que $(X+1)^6 - X^6 - 2X - 1 = X(X+1)(2X+1)(aX^2+bX+c)$.

....

f) Pour quelles valeurs de a le théorème des gendarmes permet-il d'affirmer que la suite $(u_n)_n$ converge ?

....

g) Combien vaut alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ en fonction de a ? ....

Formes indéterminées

Calcul 2.8 — **Reconnaître une forme indéterminée (I).**

Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle présente une forme indéterminée.

a) $n^2 + 3n + 1$ ....

b) $\sqrt{n} - n$ ....

c) $(1{,}001)^n \times \dfrac{1}{n^{19}}$ ....

d) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{n} + \dfrac{49}{n^2} + \dfrac{1}{8n^3}$ ....

Calcul 2.9 — **Reconnaître une forme indéterminée (II).**

Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle présente une forme indéterminée.

a) $\dfrac{\sqrt{2n^{-3}}}{n^2+5}$ ....

b) $\dfrac{\sin(1/n)}{\mathrm{e}^{-n}}$ ....

c) $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{3^{-n}}$ ....

d) $-4^{2n-1} \times \cos((-1)^n\pi)$ ...

Calculs de limites

Calcul 2.10

Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

On pourra factoriser par le terme prépondérant pour lever les indéterminations.

a) $n\sqrt{\ln(n)} - \sqrt{n}\ln(n)^2$ ....

b) $\dfrac{2^n - \frac{1}{2^n}}{n^2 - \frac{1}{n^2}}$ ....

c) $\dfrac{5^n - 1}{10^n + 5}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{2}n - 1}{n + \sqrt{2}}$ ....

Calcul 2.11

Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

On pourra factoriser par le terme prépondérant pour lever les indéterminations.

a) $\dfrac{3n^3 - n^2 - 17}{5n^3 + 9n^2 + n}$ ....

b) $\dfrac{(3-n)(2+\sqrt{n})}{9 - n^2}$ ....

c) $\dfrac{\left(\frac{8}{11}\right)^n}{\left(\frac{24}{121}\right)^n}$ ....

d) $8^{7n} - 56^n$ ....

Calcul 2.12 — Avec des radicaux.

Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

Pour lever les indéterminations, on pourra utiliser la quantité conjuguée ou factoriser par les termes prépondérants.

a) $\sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ ....

b) $\sqrt{n^2 + 2n} - n$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2n^2 - n + 1} - n}{2n + 12}$ ....

d) $\sqrt{2n + \sqrt{3n}} - \sqrt{2n}$ ....

Calcul 2.13

Calculer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

a) $\dfrac{n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3}{n\sqrt{n} - 2n}$ ....

b) $\dfrac{-3\exp(n) + 5\exp(3n)}{\exp(2n) - 4\exp(n)}$ ....

c) $\dfrac{7 - 5\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \frac{2}{n}}$ ....

d) $\dfrac{n + \sin(n)}{-2n - 4\cos(n)}$ ....

Utiliser les quantificateurs

Calcul 2.14 — **À partir d'un certain rang ?**

a) Écrire avec les symboles $\forall$ et $\exists$ la phrase « la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang ».

. . . .

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Peut-on en déduire, en général, que la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang ?

(a) Oui (b) Non

. . . .

c) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 2$.

Peut-on alors en déduire, en général, que la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang ?

(a) Oui (b) Non

. . . .

Calculs plus avancés

On peut lever certaines formes indéterminées en utilisant le taux d'accroissement. Par exemple, comme la fonction sinus est dérivable en 0, on sait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0).$$

Comme $\sin' = \cos$, cela peut se réécrire

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.}$$

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser de telles considérations pour répondre aux questions.

Calcul 2.15 — **Taux d'accroissement.**

a) Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ . . . .

b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$ . . . .

c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$ . . . .

Calcul 2.16 — Une limite remarquable.

On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \ln(u_n)$.

a) Calculer v_n ....

b) Calculer la limite de $(v_n)_n$ ....

c) En déduire la limite de $(u_n)_n$ ....

Si vous trouvez 1 ou $+\infty$, vous vous êtes trompé.

Calcul 2.17

Calculer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ ....

b) $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}$ ....

Réponses mélangées

0 $+\infty$ 1 0 0 -5 a^2-a+1 $n\ln(1+\dfrac{1}{n})$ $\dfrac{1}{2}$ d

$\dfrac{3}{5}$ 0 non $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ 1 oui $\sqrt{2}$ oui c non 1

b b 1 $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n>n_0, u_{n+1}\geqslant u_n$ 5 oui $+\infty$ $\dfrac{-1}{6}$

$+\infty$ $+\infty$ $\dfrac{5}{2}$ oui 0 $+\infty$ $-1,\ \dfrac{1}{2^6}-1$ et 0 0 oui non

non non oui a $+\infty$ oui oui 0 $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $]21,+\infty[$ e

$(a,b,c)=(3,3,4)$ 1 non non $]1,6]$ $]-\infty,-3]\cup]0,3]$ 1 1

$-\dfrac{1}{2}$ 0 $\left\{-1,\dfrac{-1}{2},0\right\}$ c $\dfrac{1}{5}$ non d $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$

▶ Réponses et corrigés page 176

Propriétés algébriques du logarithme

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 3.1 — Quelques simplifications.

Écrire sous forme d'une fraction irréductible les nombres suivants.

a) $\dfrac{36}{45}$ .....

b) $\dfrac{2}{7} \times \dfrac{28}{16}$.

c) $\dfrac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{10}}$ ....

d) $\dfrac{10^3 \times 3^5}{6^4 \times 5^2}$

Calcul 3.2 — Quelques équations.

Résoudre les équations suivantes en donnant la valeur de leur solution.

a) $2x + 4 = 5x - 3$ ....

b) $x + \dfrac{1}{2} = 6x - 5$ ....

c) $\dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{2}$ ....

d) $\dfrac{5}{3}x = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{5}$ ....

Propriétés du logarithme

Calcul 3.3

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(3) + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

b) $\ln(10) - \ln(2)$

c) $2\ln(\sqrt{7})$ ......

Calcul 3.4

Exprimer les quantités suivantes à l'aide de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

a) $\ln(32)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{81}\right)$ ....

c) $\ln(12)$ ....

d) $3\ln(6) - 2\ln(4) - \ln(9)$ ....

e) $\ln(\sqrt{27})$ ....

f) $\ln(\sqrt{6})$ ....

Calcul 3.5 — Autour de la constante « e » d'Euler.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln\left(e^2\right)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{11}}\right)$ ....

c) $\ln(\sqrt{e})$ ....

d) $\ln(\sqrt{e^7})$ ....

Calcul 3.6 — Logarithme et fonction exponentielle.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{\ln(7)-\ln(5)}$ ....

b) $e^{3\ln(10)}$ ....

c) $e^{-\ln(\ln(3))}$ ....

Calcul 3.7 — Simplifications remarquables.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right)$ ....

c) $\ln\left((\sqrt{2}-1)^{15}\right)+\ln\left((\sqrt{2}+1)^{15}\right)$ ....

d) $\ln(140)+\ln\left(\dfrac{6}{7}\right)-\ln(24)$ ....

Équations et inéquations

Calcul 3.8 — Bien défini ?

Indiquer pour quelles valeurs du nombre réel x les quantités suivantes sont bien définies.

a) $\ln(1+x)$ .....

b) $\ln\left(x^2-3x\right)$ ..

c) $\ln\left(\ln(x)\right)$ ....

Calcul 3.9

Quel est le signe de chacune des quantités suivantes ?

a) $\ln(2)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ....

c) $\ln(0{,}8)$ ....

d) $\left(\ln(0{,}8)\right)^2$ ....

e) $\ln\left(0{,}8^2\right)$ ......

f) $\ln(3)-1$ .....