BIOGRAPHIE DES GRANDS THÉORÈMES

Bertrand **Hauchecorne**

Préface de Jean **Dhombres**

ellipses

CHAPITRE 1

Théorème de Thalès

Curieusement, suivant les pays, le nom de Thalès n'est pas attribué au même théorème. En France, ce n'est qu'au XIX[e] siècle qu'on donna ce nom au résultat sur la proportionnalité que découpent des droites parallèles sur deux sécantes. En Angleterre et en Allemagne, c'est un autre résultat qui porte ce nom, connu chez nous sous le nom de théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle. Quant à l'Espagne et l'Italie, ils ont deux théorèmes de Thalès. Pourtant, ces résultats attribués à Thalès étaient connus avant lui et ne furent démontrés correctement par Euclide que plus de deux siècles plus tard.

Énoncés et démonstrations

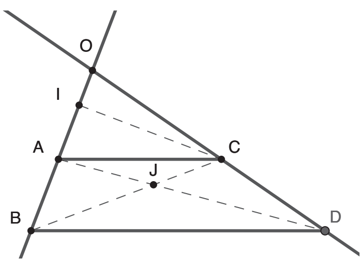
ÉNONCÉS

Théorème de Thalès

Soit deux droites sécantes en un point *O*, *A* et *B* deux points de l'une, *C* et *D* deux points de l'autre. Les droites (*AC*) et (*BD*) sont parallèles si et seulement si $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$

Théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle

Considérons un triangle (*ABC*) inscrit dans un cercle. Le segment [*AB*] est un diamètre si et seulement si le triangle (*ABC*) est rectangle en *C*.



Théorème de Thalès

DÉMONSTRATION

Théorème de Thalès

Voici une démonstration proche de celle d'Euclide.

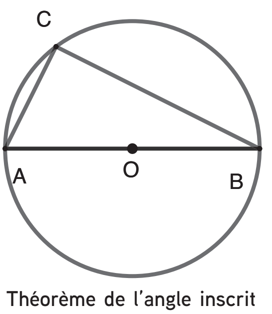
Les deux triangles *BAD* et *BCD* ont la même base et des hauteurs égales puisque les droites (*AC*) et (*BD*) sont parallèles : ils ont donc la même aire. On en déduit que les deux triangles *OBC* et *OAD* ont la même aire eux aussi.

Appelons *I* la projection orthogonale de *C* sur la droite (*OB*). L'aire du triangle *OBC* vaut $(CI \times OB)/2$. De même l'aire du triangle *OAC* vaut $(CI \times OA)/2$. Le quotient de l'aire de *OAC* sur celle de *OBC* vaut donc OA/OB. Par un calcul analogue le quotient de l'aire de *OAC* sur celle de *OAD* vaut donc OC/OD. Les deux triangles *OBC* et *OAD* ayant la même aire, ces deux rapports sont égaux. Le quotient des valeurs absolues étant clairement de même signe (positif sur le graphique), on en déduit l'égalité.

Théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle

En notant, *O* le centre du cercle, (*AB*) un diamètre et *C* un point du cercle, les triangles *AOC* et *COB* sont isocèles puisque deux de leurs côtés sont des rayons du cercle. Les angles $\widehat{ACO}$ et $\widehat{CAO}$ sont donc égaux et de même, les angles $\widehat{BCO}$ et $\widehat{CBO}$ le sont aussi. Comme la somme de ces quatre angles vaut 180 degrés, l'angle *ACB*, somme des angles $\widehat{ACO}$ et $\widehat{BCO}$ vaut la moitié, soit 90 degrés, c'est-à-dire un angle droit.

Pour la réciproque, on prend un triangle *ABC* rectangle en *C* et on considère un cercle de diamètre (*AB*). On utilise alors le sens direct en considérant deux cas selon que *C* est extérieur ou intérieur au cercle et en raisonnant sur l'intersection de la droite (*AC*) et du cercle.



Théorème de l'angle inscrit

Biographie du théorème

La géométrie avant les Grecs

Dès le début de la civilisation babylonienne, entre 1900 et 1600 avant notre ère, des tablettes d'argile prouvent que ce peuple possédait des notions de géométrie. Cela leur était utile pour l'arpentage. Sur la tablette Plimpton 322, découverte en 1922, on a retrouvé des triplets pythagoriciens (voir chapitre 2). Sur celle numérotée Si.427, certes découverte en 1894 mais retrouvée récemment à Istanbul, sont représentés des champs de forme géométrique, triangles, rectangles, carrés et même trapèzes, sans doute un embryon de cadastre. D'autres tablettes avaient manifestement un objectif didactique.

La notion abstraite de théorème, exprimée de manière formelle comme nous le faisons, n'existait pas, a fortiori la notion de démonstration. Pourtant la tablette MLC1950, elle aussi datée entre 1900 et 1600 avant notre ère, présente un exercice dans lequel on cherche à calculer les bases d'un trapèze rectangle connaissant son aire, sa hauteur et celle du triangle correspondant. Le résoudre revient à appliquer les propriétés de la relation du théorème de Thalès.

En Égypte ancienne, la géométrie semble avoir été moins développée. La construction des pyramides montre néanmoins des connaissances géométriques certaines. Cette discipline était utilisée ici, de manière pragmatique et sans souci de démonstration, sans doute pour délimiter les champs lors des inondations du Nil. Pour les Égyptiens, l'arithmétique et la géométrie étaient intimement liées. On sait qu'ils avaient connaissance du théorème de Pythagore puisqu'ils utilisaient une corde avec des nœuds placés dans des rapports du plus petit triplet pythagoriciens 3, 4 et 5. Dans les problèmes 56 à 60 du papyrus de Rhind, daté de 1550 avant notre ère, rédigé par le scribe Ahmès, on devine la connaissance des proportionnalités induites par le théorème de Thalès lorsque sont calculées les hauteurs des pyramides en fonction de leur pente.

Et Thalès dans tout ça ?

Thalès n'a laissé aucun écrit mais son souvenir a perduré des siècles durant ; ceci montre à l'évidence que c'était un homme d'un immense savoir pour l'époque et qui faisait l'objet d'une grande admiration de ses contemporains. On sait peu de choses sur sa vie mais il semble certain qu'il s'est rendu en Égypte, du moins si on en croit Aristote qui affirmait : « Thalès a réussi à mesurer la hauteur des pyramides en observant la longueur de leur ombre au moment où notre ombre égale notre propre hauteur. » Plutarque, quant à lui, écrivait : « sans aucun instrument, il a planté son bâton à l'extrémité de l'ombre de la pyramide et, ayant créé deux triangles par l'impact des rayons du soleil [...]

il a montré que la pyramide avait au bâton le même rapport que l'ombre de la pyramide à l'ombre du bâton ». C'est sans doute la raison pour laquelle, à la fin du XIX^e^ siècle, on a attribué à Thalès le théorème qui concerne ce chapitre.

Ce qui est certain c'est que Thalès savait utiliser la géométrie pour résoudre des problèmes pratiques. Avait-il inventé lui-même ces procédés ou l'avait-il appris des Égyptiens, nul ne le sait ? Son prestige était si grand qu'on lui a attribué par la suite la découverte de nombreux théorèmes de géométrie élémentaire sans qu'on sache vraiment s'il les avait lui-même énoncés. Parmi ceux-ci figure le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle.

Enfin arrive Euclide

Le premier énoncé du théorème de Thalès, avec sa réciproque, se trouve au début du livre VI, proposition 2, des *Éléments* d'Euclide que voici dans la traduction d'Antoine Houlou-Garcia : « Si une droite est adjointe [parallèlement] à un côté d'un triangle, elle coupera proportionnellement les [autres] côtés du triangle. » Ce texte est suivi d'une démonstration (voir [01-4] pp. 164-165 et [01-1] p. 215).

Le théorème de Thalès s'applique dans de nombreuses activités pratiques et son utilisation se fait presque inconsciemment. En géométrie projective, l'utilisation du birapport en est, en quelque sorte, une généralisation (voir chapitre 4).

Théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle

Quant à l'autre théorème de Thalès, lui aussi était connu des Babyloniens et aucune référence ne prouve que Thalès l'ait démontré. C'est encore en feuilletant le Livre III des *Éléments* qu'on le trouve mais auparavant, la proposition 20 lui est liée et s'exprime ainsi : « dans un cercle, l'angle au centre est double de celui sur la circonférence quand les angles ont la même circonférence [corde] comme base » (traduction de Bernard Vitrac, voir [01-2] pp. 431-433). Ce résultat est connu sous le nom de théorème de l'arc capable puisque l'angle au centre ne dépend pas du point choisi sur chacun des deux arcs de cercles délimités par la corde et donc quel que soit le point A situé sur un des deux arcs de cercle délimité par une corde $[BC]$, l'angle $\widehat{BAC}$ est indépendant du point A choisi sur cet arc.

Il faut aller jusqu'à la proposition 31 du même livre III pour rencontrer le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle qu'Euclide exprime ainsi (voir [01-2] pp. 449-453 mais aussi [01-1] pp. 144-146) : « dans un cercle, d'une part l'angle dans le demi-cercle est droit, d'autre part celui dans un segment [arc de cercle] plus grand [qu'un demi-cercle] est plus petit qu'un droit, celui dans un segment plus petit est plus grand qu'un droit. […] »

La réciproque se déduit des considérations de la fin du texte.

Les protagonistes

Thalès de Milet

(Milet env. 625 av. J.-C. – env. 547 av. J.-C.)

On sait peu de choses de la vie de Thalès de Milet sinon par des textes écrits longtemps après sa mort et dont on peut douter de l'authenticité. Thalès est un commerçant, et même un spéculateur selon Aristote ; il s'est suffisamment enrichi pour consacrer la fin de sa vie aux études et aux voyages. Son premier périple l'aurait conduit en Égypte. Il calcule la hauteur des pyramides grâce à leur ombre portée : c'est l'une des premières utilisations du théorème qui porte maintenant son nom. De retour à Milet, il acquiert une réputation d'ingénieur, d'homme d'affaires, d'homme d'État mais aussi de philosophe, de mathématicien et d'astronome. Il se rend compte que l'année dure trois cent soixante-cinq jours et prédit, semble-t-il, certaines éclipses de Soleil.

On ne peut être certain de l'authenticité des découvertes attribuées à Thalès. Il est sûr cependant que c'est à son époque, sinon avec lui, que débute la spéculation mathématique. Son œuvre concerne la géométrie élémentaire, celle qui traite des droites, des angles et des triangles. Les résultats qu'il énonce sont des propositions isolées et il semble que certains soient déjà connus des Babyloniens.

Six résultats importants sont attribués à Thalès, en particulier le théorème « du pont aux ânes », qui affirme que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux et bien sûr, les deux théorèmes concernés par ce chapitre.

Euclide

(env. 330 av. J.-C. – env. 275 av. J.-C.)

Venu de Grèce, Euclide enseignait à Alexandrie au début du IIIe siècle avant notre ère. Son ouvrage fondamental intitulé *Les Éléments*, regroupe presque toutes les connaissances mathématiques de l'époque en géométrie métrique, coniques exceptées, et en théorie des nombres. On y retrouve toutes les bases de la géométrie et les premières démonstrations connues des théorèmes de Thalès et de Pythagore. Sa démarche y est nouvelle puisqu'il justifie ses raisonnements rigoureusement en se basant sur des axiomes. Il faudra près de vingt siècles pour dépasser son œuvre en géométrie ; jusqu'au XVIIIe siècle, toutes les mathématiques sont formées à son exemple.

Références

[01-1] Euclide, *Les Éléments*, traduction de Denis Henrion, 1632.

[01-2] Euclide, *Les Éléments*, traduction de Bernard Vitrac.

[01-3] Élisabeth Busser, *Thalès et son théorème : un flou historique*, saga des grands théorèmes, Tangente n° 167, 2015.

[01-4] Antoine Houlou-Garcia, *Mathematikos*, Les Belles Lettres, 2019.

CHAPITRE 2

Théorème de Pythagore

La relation concernant les carrés des côtés d'un triangle rectangle est le plus célèbre des théorèmes. Connue bien avant Pythagore, c'est pourtant à lui qu'en est attribuée la paternité, donnant à ce philosophe atypique du VIe siècle avant notre ère, une réputation d'immense mathématicien. Une relation plus fine porte le nom du savant Jemchid al-Kachi bien qu'elle soit déjà connue d'Euclide, mais sans référence trigonométrique.

Énoncé et démonstration

ÉNONCÉS

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. En d'autres termes, si le triangle (ABC) est rectangle en A, alors

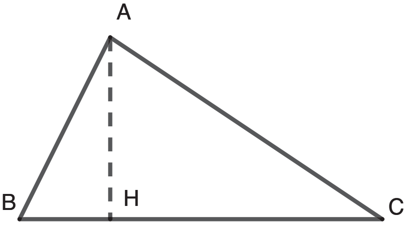
$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

On peut remarquer que la réciproque est vraie et que cette propriété caractérise les triangles rectangles.

Loi des cosinus ou théorème d'al-Kachi

Dans un triangle ABC, on a la relation

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$



Théorème de Pythagore

DÉMONSTRATIONS

Démonstration traditionnelle

Notons ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A (voir Fig. 1). Les triangles ABC et ABH sont semblables puisqu'ils sont rectangles ACH avec l'angle en B commun. La longueur de leurs côtés est donc proportionnelle donc $\frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB}$ soit $AB^2 = BC.BH$. En opérant de même avec les triangles semblables ABC et, on obtient $AC^2 = BC.AH$ d'où en additionnant ces deux relations $AB^2 + AC^2 = BC.(BH + AH) = BC^2$

Démonstration dans le cadre des espaces vectoriels

On se place dans un plan affine euclidien, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire. Par définition deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Prenons un triangle ABC rectangle en A c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et que l'hypoténuse est BC. Alors $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2$ puisque le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ est nul par hypothèse. Ce procédé est mécanique et cache la vision géométrique du problème.

Démonstration d'Euclide

Pour une meilleure compréhension, voici une démonstration en termes modernes. On construit sur les trois côtés du triangle ABC rectangle en A les carrés $ABFG$, $ACHI$ et $BCED$ (voir Fig. 2). Traçons la parallèle à BD passant par A et notons respectivement J et K ses intersections avec les segments BC et DE. L'idée est de montrer que le rectangle $BJKD$ et le carré $ABGF$ ont la même aire et par un même raisonnement on en déduira que le rectangle $JCEK$ et le carré $ACHI$. Il ne restera plus qu'à faire la somme de ces deux relations pour conclure.

En fait, nous allons montrer que les triangles BGA et BDJ ont la même aire. Remarquons déjà que BGA et BGC ont la même aire puisqu'ils ont la même base BG et que leurs sommets respectifs sont situés sur une parallèle à la base donc les hauteurs issues de A pour l'un et de F pour l'autre ont la même longueur. Par le même raisonnement les triangles BDJ et BDA ont la même aire puisque leur base BD est commune et que A et I sont situés sur une même parallèle à BD. Il ne reste plus qu'à montrer que les triangles BGC et BDA ont la même aire. Considérons la rotation de centre B et d'angle $-\pi/2$. Elle envoie G sur A et C sur D ; c'est une isométrie, donc les aires sont conservées. Enfin, l'aire du carré $ABGF$ et celle du rectangle $BJKD$ sont égales, ce qui permet de conclure par la remarque faite précédemment.