

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

1.1 Rudiments de logique

1.1.1 Assertions

Une **assertion** (ou **propriété**) est un assemblage de mots dont la construction obéit à une certaine syntaxe et à laquelle on peut donner une valeur de vérité : V (vraie) ou F (faux).

- ☞ « 3 est un nombre impair » est une assertion vraie.
- ☞ « $10^2 = 101$ » est une assertion fausse.
- ☞ « $2 = 3 +$ » n'est pas une assertion.

Définition 1.1 Connecteurs élémentaires

Si P et Q sont deux assertions, on définit les assertions :

- ✓ (Non P) qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse sinon ;
- ✓ (P et Q) qui est vraie lorsque les deux assertions P et Q sont vraies, et fausse sinon ;
- ✓ (P ou Q) qui est vraie lorsqu'au moins une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.

Les valeurs de vérité de ces nouvelles assertions satisfont aux tables suivantes :

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

□

Définition 1.2 Implication, équivalence

Si P et Q sont deux assertions, on définit les assertions $P \implies Q$ et $P \iff Q$ par :

- ✓ $P \implies Q$: (Non P) ou Q ,
- ✓ $P \iff Q$: ($P \implies Q$) et ($Q \implies P$).

Les valeurs de vérité vérifient le tableau suivant :

P	Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

□

- ☞ Par définition, l'assertion $P \implies Q$ est vraie dès que P est fausse. Elle peut donc être vraie même lorsque Q est fausse, par exemple l'assertion

$$(2 = 3) \implies (1 = 4)$$

est vraie.

- ☞ Si P est vraie et si $P \implies Q$ est vraie, alors Q est vraie.
- ☞ L'implication $Q \implies P$ s'appelle la réciproque de l'implication $P \implies Q$.
- ☞ L'équivalence $P \iff Q$ est vraie si, et seulement si, P et Q sont logiquement équivalentes.
- ☞ la négation de $P \implies Q$ est donnée par : $\text{Non}(P \implies Q) \iff (P \text{ et Non}(Q))$.
- ☞ On a également : $(P \implies Q) \iff (\text{Non}(Q) \implies \text{Non}(P))$.

1.1.2 Modes de raisonnement**Raisonnement par récurrence**

Théorème 1.1 Soit P une propriété définie sur \mathbb{N} . Si :

- ✓ $P(0)$ est vraie,
- ✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ($P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie).

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Corollaire Soit P une propriété définie sur $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$. Si :

- ✓ $P(n_0)$ est vraie,
- ✓ pour tout entier $n \geq n_0$, ($P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie).

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

□

Corollaire Soit P une propriété définie sur $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$. Si :

- ✓ $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies,
- ✓ pour tout entier $n \geq n_0$, $((P(n) \text{ et } P(n+1)) \text{ vraies entraînent } P(n+2) \text{ vraie})$.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. \square

Raisonnements pour montrer que $P \implies Q$

Les trois types de raisonnements pour montrer que $P \implies Q$ sont :

- \Leftarrow raisonnement direct : on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie,
- \Leftarrow raisonnement par contraposée : on suppose que $\text{Non}(Q)$ est vraie et on montre que $\text{Non}(P)$ est vraie,
- \Leftarrow raisonnement par l'absurde : on suppose que P est vraie, et on suppose « par l'absurde » que $\text{Non}(Q)$ est vraie. On cherche alors une contradiction.

1.2 Ensembles

- \square Un ensemble est une collection d'objets. La notation $x \in E$ signifie x appartient à E ; sa négation est notée $x \notin E$. On note \emptyset l'ensemble vide, qui n'a aucun élément.
- \square Le quantificateur universel \forall se lit « pour tout » ou « quel que soit ». L'expression $(\forall x \in E, P(x))$ se lit pour tout élément x appartenant à E on a $P(x)$.
- \square Le quantificateur existentiel \exists se lit « il existe au moins un élément ». La notation $\exists!$ signifie « il existe un et un seul élément ». L'expression $(\exists x \in E, P(x))$ se lit il existe au moins un élément x appartenant à E tel que l'on ait $P(x)$.
- \square Négation d'une phrase quantifiée : on a

$$\begin{cases} (\text{Non}(\forall x \in E, P(x))) & \iff (\exists x \in E, \text{Non } P(x)), \\ (\text{Non}(\exists x \in E, P(x))) & \iff (\forall x \in E, \text{Non } P(x)), \end{cases}$$

- \Leftarrow **Limite d'une suite réelle.** Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est limite de $(x_n)_{n \geq 0}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \implies |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

La phrase exprimant qu'un réel l n'est pas limite de $(x_n)_{n \geq 0}$ est alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \text{ et } |x_n - l| > \varepsilon.$$

☞ **Continuité.** Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

La phrase exprimant que f n'est pas continue en a est alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad (|x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon).$$

Définition 1.3 Inclusion

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F (ou E est une partie de F), et on note $E \subset F$, si : $\forall x \in E, x \in F$.

On note $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de F . □

Définition 1.4 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit les parties suivantes de E :

- ✓ complémentaire de A dans E : $\complement_E A = \{x \in E; x \notin A\}$,
- ✓ réunion de A et B : $A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$,
- ✓ intersection de A et B : $A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$,
- ✓ différence de A moins B : $A - B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}$,
- ✓ différence symétrique de A et B : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. □

□ Couples, produit cartésien : en partant de deux éléments x et y , on peut construire le couple (x, y) avec la propriété suivante :

$$(x, y) = (x', y') \iff (x = x' \text{ et } y = y').$$

Étant donnés deux ensembles A et B , l'ensemble des couples de la forme (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$ est appelé produit cartésien de A par B et se note $A \times B$.

On a donc :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

1.3 Applications et relations

Définition 1.5 Une application f est un triplet (E, F, G) où E et F sont des ensembles non vides, et G un sous-ensemble de $E \times F$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe un élément y et un seul de F tel que (x, y) appartienne à G .

L'élément y est noté $f(x)$. On dit alors que f est une application définie sur E à valeurs dans F .

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E . □

- ☞ Une application de E dans F associe à tout élément de E un et un seul élément de F .
- ☞ L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ de f . L'ensemble F s'appelle l'ensemble d'arrivée de f , l'ensemble G est le graphe de f .
- ☞ Si $x \in E$, on appelle $f(x)$ l'image de x par f , et si $y = f(x)$ on appelle x un antécédent de y par f .
- ☞ Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée F et pour tout $x \in E$ on a $f(x) = g(x)$.

Définition 1.6 Composée de deux applications. Soient E, F, G trois ensembles non vides, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Alors on définit une application de $E \rightarrow G$, par $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, en posant pour tout $x \in E$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

- ☞ Soit E un ensemble non vide, on appelle application identité ou identité de E , et l'on note Id_E , l'application de $E \rightarrow E$ définie par $\text{Id}_E(x) = x$. En particulier, si $f : E \rightarrow F$ est une application, alors $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.
- ☞ Généralement, même si $E = G$, on n'a pas nécessairement $f \circ g = g \circ f$. En prenant, par exemple, les applications $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies par $f(n) = 2n$ et $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$, alors on a : $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ mais $f \circ g \neq \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
- ☞ Si $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ sont trois applications où E, F, G, H sont quatre ensembles non vides. Alors, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Définition 1.7 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Si A est une partie de E , la restriction de f à A , notée $f|_A$, est l'application de $A \rightarrow F$ définie par : $f|_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

On appelle prolongement de f toute application g définie sur un ensemble B contenant E et vérifiant : $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. □

Définition 1.8 Injectivité. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est injective si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- ✓ tout élément de F admet au plus un antécédent par f ,
- ✓ pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution,
- ✓ pour tout $(x, y) \in E^2$ on a : $f(x) = f(y) \implies x = y$. □

Définition 1.9 Surjectivité. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- ✓ tout élément de F admet au moins un antécédent par f ,
- ✓ pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution,
- ✓ pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. □

Définition 1.10 Bijectivité. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- ✓ tout élément de F admet un et un seul antécédent par f ,
- ✓ pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution,
- ✓ pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. □

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Définition 1.11 Application réciproque. Si $f : E \rightarrow F$ est une application bijective, alors l'application de $F \rightarrow E$ qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E s'appelle l'application réciproque de f et se note f^{-1} . Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

- Si $f : E \rightarrow F$ est une application bijective, alors on a : $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ sont deux applications vérifiant $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$, alors elles sont toutes les deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.
- Si $f : E \rightarrow F$ est une bijection, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est une bijection et on a : $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Soient E, F et G trois ensembles. Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ sont deux applications bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Définition 1.12 **Images directes, images réciproques.** Soient $f : E \rightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F . On appelle :

- ✓ image (directe) de A par f l'ensemble

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\},$$

- ✓ image réciproque de B par f , l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

- ☞ L'utilisation de la notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que f est bijective.
- ☞ Lorsque f est bijective, $f^{-1}(B)$ représente aussi bien l'image directe de B par l'application f^{-1} , que l'image réciproque de B par f .
- ☞ Une application $f : E \rightarrow F$ est :
 - injective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet au plus un élément,
 - surjective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet au moins un élément,
 - bijective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet exactement un élément.

Proposition 1.1 Soient $f : E \rightarrow F$ une application, B_1 et B_2 deux parties de F . Alors on a :

- ✓ $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,
- ✓ $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
- ✓ $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
- ✓ $f^{-1}(\mathbb{C}_F B_1) = \mathbb{C}_E f^{-1}(B_1)$.

□

Proposition 1.2 Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, A_1 et A_2 deux parties de E . Alors on a :

- ✓ $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$,
- ✓ $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
- ✓ $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

☞ Attention, l'inclusion $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ est, en général, fautive. Par exemple, on a :

$$\sin([0, 2\pi]) \cap \sin([-\pi, \pi]) = [-1, 1] \text{ alors que } \sin([0, 2\pi] \cap [-\pi, \pi]) = [0, 1].$$

Définition 1.13 Fonctions caractéristiques. Soit A une partie de E , on appelle fonction caractéristique de A , l'application $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

☞ On a toujours : $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.

☞ Deux ensembles A et B sont égaux si, et seulement si, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. En particulier, $\mathbb{1}_E = 1$ et $\mathbb{1}_\emptyset = 0$.

Proposition 1.3 On a les relations suivantes :

- ✓ $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A - B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$. □

☞ L'application $A \longmapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ des applications de E dans $\{0, 1\}$.

Définition 1.14 Famille indexée. Étant donnés deux ensembles I et E , on appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E . □

□ Si $I = \mathbb{N}$, une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E est appelée suite d'éléments de E .

□ Étant donnés deux ensembles I et E , une famille de parties de E indexée par I est une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$. On a :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \forall i \in I, x \in A_i\}, \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \exists i \in I, x \in A_i\}$$