Chapitre 1

FONCTIONS CONVEXES

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

1.1 Barycentres et convexité

On suppose ici que le corps de base est $\mathbb{R}$.

Définition 1.1

Soit E un espace affine sur $\mathbb{R}$, a et b deux points de E. On appelle segment $[a, b]$ l'ensemble des barycentres des points a et b affectés des coefficients t et $1 - t$ pour $t \in [0, 1]$. Autrement dit : $[a, b] = \{a + t\,\overrightarrow{ab} \ : \ t \in [0, 1]\}$. $\square$

Définition 1.2

Soit E un espace affine sur $\mathbb{R}$ et A une partie de E. On dit que A est convexe si :

$$\forall\, a, b \in A, \qquad [a, b] \subset A.$$

Théorème 1.1

Une partie A de E est convexe si, et seulement si, tout barycentre à coefficients positifs d'une famille finie de points de A est encore dans A. $\square$

Soit A une partie de E, l'intersection de tous les convexes contenant A est encore une partie convexe contenant A, et elle est contenue dans toute partie convexe contenant A. On l'appelle enveloppe convexe de A, et on la note $\mathrm{Conv}(A)$.

Théorème 1.2
L'enveloppe convexe $Conv(A)$ de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A. □

1.2 Fonctions convexes d'une variable réelle

Définition 1.3
La fonction f est convexe sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

La fonction f est concave si $-f$ est convexe. □

- ☞ La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous points A_1 et A_2 du graphe Γ de f d'abscisses respectives x_1 et x_2, le graphe de $f_{|[x_1,x_2]}$ est en dessous de la corde $[A_1, A_2]$.
- ☞ f est convexe si, et seulement si, son épigraphe $E_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \ : \ y \geq f(x)\}$ est une partie convexe du plan.
- ☞ Toute fonction affine est à la fois convexe et concave.

Proposition 1.1
Étant données une fonction f convexe sur I et une famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$ de réels positifs tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 1$, on a :

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in I^p, \qquad f\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f(x_k).$$

✍ f étant convexe sur I, si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ sont des réels positifs non tous nuls, on a :

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_p) \in I^p, \quad f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_p f(x_p)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p}.$$

Proposition 1.2
Caractérisation en terme de pente
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

✓ f est convexe,

✓ $\forall (x,y,z) \in I^3, \qquad x < y < z \implies \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$,

✓ $\forall (x,y,z) \in I^3, \qquad x < y < z \implies \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$,

✓ $\forall (x,y,z) \in I^3, \qquad x < y < z \implies \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. □

Proposition 1.3

Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si, et seulement si, pour tout $a \in I$, l'application :

$$\varphi_a : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est croissante. □

✍ Si p et q sont deux réels, alors :

$$g : x \longmapsto f(x) - px - q \text{ est convexe} \qquad \iff \qquad f \text{ est convexe.}$$

En effet, les fonctions φ_a correspondants à f et à g diffèrent du réel p.

1.3 Convexité et dérivabilité

Théorème 1.3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$ et, pour tout $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$ on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \leq \quad f'_g(b) \quad \leq \quad f'_d(b) \quad \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Corollaire

Si f est convexe sur l'intervalle I, alors f est continue sur $\mathring{I}$. □

☞ Il se peut que f soit convexe sur l'intervalle $[a,b]$ mais discontinue en a, ou continue en a et non dérivable en a. Exemples :

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

ou

$$g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

Théorème 1.4
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Pour que f soit convexe, il faut et il suffit que f' soit croissante sur I. □

Corollaire
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I. Alors, f est convexe si, et seulement si $f'' \geq 0$. □

Proposition 1.4
Position par rapport à la tangente
Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I, alors on a :

$$\forall (x, a) \in I^2, \qquad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a).$$

1.4 Quelques inégalités de convexité

- ☞ Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$.
- ☞ Inégalité arithmético-géométrique : pour tous réels positifs $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

avec égalité si, et seulement si, tous les x_i sont égaux.
- ☞ Inégalité de Hölder : soient $p > 0, q > 0$ deux réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

- ☞ Inégalité de Minkowski : soient $p \geq 1$ un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ réels postifs on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

☞ Inégalité de Jensen : Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \quad \leq \quad \int_0^1 \varphi(f(x))\,dx.$$

1.5 Exercices

1.5.1 Exercices de base

Exercice 1.1

Vrai - Faux

Soient f et g deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \max(f(x), g(x))$ est convexe.

2. La fonction $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \min(f(x), g(x))$ est convexe. □

1. Vrai. En effet, on a : $\mathrm{Epi}(F) = \mathrm{Epi}(f) \cap \mathrm{Epi}(g)$, et comme l'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe, alors on déduit que F est une fonction convexe.

On peut aussi montrer ce résultat par des calculs directs. Comme f et g convexes, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad &\leq \quad \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \leq \quad \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y), \\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad &\leq \quad \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \quad \leq \quad \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y), \end{aligned}$$

par conséquent :

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = \max(f(\lambda x + (1-\lambda)y), g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \ \leq\ \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y).$$

2. Faux. Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, alors : $G\left(\dfrac{-1+1}{2}\right) = 0$ et $\dfrac{G(-1)+G(1)}{2} = -1$. La fonction G n'est pas convexe.

Exercice 1.2

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a < b$ deux nombres réels.

1. Montrer que : $\quad f(a) < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

2. Montrer que : $\quad f(a) > f(b) \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$ □

Considérons la fonction τ_a définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ par :

$$\tau_a(x) \quad = \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Comme f est convexe, alors τ_a est croissante. Par hypothèse, on a : $\tau_a(b) > 0$, soit $x > b$ alors $\tau_a(x) \geq \tau_a(b) > 0$ et par suite :

$$f(x) \quad \geq \quad f(a) + (x - a)\,\tau_a(b).$$

En conclusion, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. On fait un raisonnement similaire à celui de la première question avec cette fois ci $]-\infty, b[$ au lieu de $]b, +\infty[$ et en utilisant le fait que $\tau_a(b) < 0$.
Remarque : si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et *bornée*, alors elle est décroissante.

Exercice 1.3

Inégalités des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique
Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des nombres réels positifs. On note A_n, G_n, H_n les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique définies par :

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \qquad H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Montrer que :

$$A_n \quad \geq \quad G_n \quad \geq \quad H_n.$$

Montrons tout d'abord que $A_n \geq G_n$. Si l'un des x_i est nul alors le résultat est évident. Sinon, on pose $x_i = e^{y_i}$ et par convexité de la fonction $x \longmapsto e^x$ on a :

$$e^{\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}} \quad \leq \quad \frac{e^{y_1} + \cdots + e^{y_n}}{n}.$$

D'où, il découle que :

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad \geq \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

En remplaçant x_i par $\dfrac{1}{x_i}$ dans l'inégalité ci-dessus, alors on obtient :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad \geq \quad \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

En conclusion, on a montré que : $A_n \geq G_n \geq H_n$.

Exercice 1.4
Soit $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = g(\cos x)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que h soit une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. □

Il est clair que la fonction h est 2π-périodique et $h(0) = h(2\pi) = h(4\pi)$. Par le lemme des pentes, on a pour tout $x \in [0, 2\pi]$ différent de 2π :

$$0 = \frac{h(2\pi) - h(0)}{2\pi} \quad \leq \quad \frac{h(2\pi) - h(x)}{2\pi - x} \quad \leq \quad \frac{h(4\pi) - h(2\pi)}{2\pi} = 0.$$

Donc, h est constante sur $[0, 2\pi]$, et par conséquent sur $\mathbb{R}$ tout entier. Finalement, comme $g(x) = h(\arccos x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, on conclut que g est aussi constante. Réciproquement, si g est constante alors h est convexe sur $\mathbb{R}$.

1.5.2 Exercices d'assimilation

Exercice 1.5 ☕
Inégalités de Hölder, de Minkowski
1. Soient p et q deux nombres réels strictement positifs et tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, et x, y deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$xy \quad \leq \quad \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$, $2n$ réels strictement positifs. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$, $2n$ réels strictement positifs et $p \geq 1$. Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. On utilise l'exercice 1.3 avec $n = 2$, $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{1}{q}$ et on pose $x_1^{a_1} = x$ et $x_2^{a_2} = y$, alors on obtient $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$. Soient $\alpha = (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}$ et $\beta = (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$. En prenant $\dfrac{a_i}{\alpha}$ pour x et $\dfrac{b_i}{\beta}$ pour y, alors on a $\dfrac{a_i b_i}{\alpha\beta} \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{a_i^p}{\alpha^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{b_i^q}{\beta^q}$ et en sommant de 1 à n on

obtient
$$\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \leq \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \quad = \quad 1,$$
ce qui termine la démonstration.
2. On a d'après l'inégalité triangulaire :
$$\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|a_i+b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i|\,|a_i+b_i|^{p-1}. \tag{1}$$
Cette inégalité donne en fait celle de Minkowski pour $p=1$. Supposons maintenant que $p>1$. D'après l'inégalité de Hölder on a :
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|a_i+b_i|^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}},\\ \sum_{i=1}^{n} |b_i|\,|a_i+b_i|^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$
L'inégalité (1) devient alors :
$$\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$
Or, si $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=0$, alors l'inégalité de Minkowski est vraie, supposons donc ce terme non nul et divisons l'inégalité ci-dessus par $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$, on arrive alors à :
$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 1.6 ☕

1. Montrer que :
$$\begin{cases} f & \text{convexe,}\\ g & \text{convexe croissante,}\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad g\circ f \quad \text{est convexe.}$$
2. Montrer que le résultat tombe en défaut si g n'est plus supposée croissante. □

1. f est convexe, donc :
$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \quad \leq \quad (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),$$