

# Table des matières

<b>1 Les ensembles et les applications</b>	<b>13</b>
1.1 Le raisonnement par récurrence . . . . .	13
1.2 Les ensembles . . . . .	16
1.3 Les relations . . . . .	20
1.3.1 Les relations d'équivalence . . . . .	21
1.3.2 Les relations d'ordre . . . . .	22
1.4 Les applications . . . . .	26
1.5 Les solutions des exercices . . . . .	29
<b>2 Les fonctions</b>	<b>45</b>
2.1 La continuité . . . . .	45
2.1.1 Les limites . . . . .	45
2.1.2 Les équivalents . . . . .	50
2.1.3 Les fonctions négligeables . . . . .	53
2.1.4 La continuité . . . . .	54
2.2 Le calcul différentiel . . . . .	57
2.2.1 La dérivation . . . . .	57
2.2.2 Le théorème des accroissements finis . . . . .	63
2.3 Les développements limités . . . . .	64
2.3.1 Les opérations sur les développements limités . . . . .	66
2.3.2 Les applications . . . . .	70
2.4 Les études de fonctions . . . . .	73
2.4.1 Les fonctions usuelles . . . . .	73
2.4.2 L'ensemble d'étude d'une fonction . . . . .	78
2.4.3 La convexité . . . . .	80
2.4.4 L'étude des branches infinies . . . . .	82
2.5 Exercices issus des annales des concours . . . . .	84
2.6 Les solutions des exercices . . . . .	87

<b>3</b>	<b>Les suites</b>	<b>113</b>
3.1	Le sens de variation d'une suite . . . . .	113
3.2	Le comportement asymptotique d'une suite . . . . .	115
3.2.1	Les théorèmes de comparaison . . . . .	116
3.2.2	La convergence des suites monotones . . . . .	118
3.2.3	Les suites adjacentes . . . . .	119
3.3	Les suites récurrentes . . . . .	121
3.3.1	Les suites arithmétiques . . . . .	121
3.3.2	Les suites géométriques . . . . .	122
3.3.3	Les suites arithmético-géométriques . . . . .	124
3.3.4	Les suites récurrentes d'ordre 2 . . . . .	125
3.3.5	L'étude des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	126
3.4	Exercices issus des annales des concours . . . . .	129
3.5	Les solutions des exercices . . . . .	132
<b>4</b>	<b>Les séries</b>	<b>157</b>
4.1	Les définitions et les séries usuelles . . . . .	157
4.1.1	Les définitions . . . . .	157
4.1.2	Les séries usuelles . . . . .	160
4.2	Les séries à termes positifs . . . . .	162
4.3	Les séries absolument convergentes . . . . .	164
4.4	Exercices issus des annales des concours . . . . .	165
4.5	Les solutions des exercices . . . . .	166
<b>5</b>	<b>L'intégration</b>	<b>177</b>
5.1	L'intégration sur un segment . . . . .	177
5.1.1	L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné . . . . .	177
5.1.2	Les calculs d'intégrales . . . . .	179
5.1.3	Les majorations et les minorationes . . . . .	181
5.1.4	Les fonctions définies par une intégrale . . . . .	183
5.1.5	Les intégrales et les suites . . . . .	186
5.2	Les intégrales généralisées . . . . .	192
5.2.1	L'intégrale d'une fonction sur un intervalle dont une borne est infinie . . . . .	192
5.2.2	L'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a; b[$ . . . . .	196
5.3	Exercices issus des annales des concours . . . . .	200
5.4	Les solutions des exercices . . . . .	203

<b>6</b>	<b>Les fonctions de plusieurs variables</b>	<b>241</b>
6.1	La topologie de $\mathbb{R}^n$	241
6.1.1	Norme et distance sur $\mathbb{R}^n$	241
6.1.2	Les boules de $\mathbb{R}^n$	242
6.1.3	Les fermés, les ouverts et les compacts	243
6.2	La continuité	245
6.3	Les dérivées partielles	248
6.3.1	Les dérivées partielles premières	248
6.3.2	Les dérivées partielles d'ordre 2	252
6.4	L'optimisation sans contrainte	257
6.4.1	Les extrema	257
6.4.2	Les conditions nécessaires du premier ordre	258
6.4.3	Les conditions nécessaires du second ordre	259
6.4.4	Les conditions suffisantes	260
6.5	L'optimisation sous contraintes	263
6.5.1	Les conditions nécessaires	264
6.5.2	Les conditions suffisantes	265
6.6	Concavité et extremum global	268
6.6.1	Les parties convexes	268
6.6.2	Les fonctions concaves et les fonctions convexes	269
6.7	Les fonctions implicites	272
6.8	Exercices issus des annales des concours	272
6.9	Les solutions des exercices	276
<b>7</b>	<b>Les matrices et les systèmes</b>	<b>301</b>
7.1	Les matrices	301
7.1.1	Les définitions	301
7.1.2	Les opérations	303
7.1.3	Les puissances d'une matrice	306
7.1.4	Les matrices inversibles	309
7.2	Les systèmes	310
7.2.1	La résolution des systèmes	310
7.2.2	L'inversion des matrices	316
7.3	Les déterminants	318
7.4	Exercices issus des annales des concours	323
7.5	Les solutions des exercices	327

<b>8</b>	<b>Les espaces vectoriels</b>	<b>351</b>
8.1	Les définitions . . . . .	351
8.2	Les sous-espaces vectoriels . . . . .	353
8.3	Les familles génératrices et les familles libres . . . . .	355
8.3.1	Les familles génératrices . . . . .	355
8.3.2	Les familles libres . . . . .	357
8.3.3	Les bases . . . . .	359
8.4	La dimension . . . . .	360
8.5	Exercices issus des annales des concours . . . . .	363
8.6	Les solutions des exercices . . . . .	364
<b>9</b>	<b>Les applications linéaires</b>	<b>375</b>
9.1	Les définitions . . . . .	375
9.2	Le noyau et l'image d'une application linéaire . . . . .	379
9.3	La matrice d'une application linéaire . . . . .	382
9.4	Le rang . . . . .	386
9.4.1	Le rang d'une application linéaire . . . . .	386
9.4.2	Le rang d'une matrice . . . . .	386
9.4.3	Le rang d'une famille de vecteurs . . . . .	387
9.5	Exercices issus des annales des concours . . . . .	388
9.6	Les solutions des exercices . . . . .	393
<b>10</b>	<b>La réduction des endomorphismes</b>	<b>413</b>
10.1	Les changements de bases . . . . .	413
10.2	Les vecteurs propres, les valeurs propres et les sous-espaces propres . . . . .	415
10.3	Le polynôme annulateur . . . . .	417
10.4	Les endomorphismes diagonalisables . . . . .	419
10.5	Exercices issus des annales des concours . . . . .	423
10.6	Les solutions des exercices . . . . .	430
<b>11</b>	<b>L'algèbre bilinéaire</b>	<b>459</b>
11.1	Les espaces euclidiens . . . . .	459
11.1.1	Les formes bilinéaires et les formes quadratiques . . . . .	459
11.1.2	Le produit scalaire . . . . .	461
11.1.3	L'orthogonalité . . . . .	463
11.1.4	La diagonalisation des matrices symétriques . . . . .	466
11.2	Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	467
11.2.1	La matrice d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	467

11.2.2	Le signe d'une forme quadratique . . . . .	468
11.3	Exercices issus des annales des concours . . . . .	474
11.4	Les solutions des exercices . . . . .	475
<b>12</b>	<b>Les probabilités sur un univers fini</b>	<b>483</b>
12.1	L'analyse combinatoire . . . . .	483
12.1.1	Le dénombrement des p-listes . . . . .	484
12.1.2	Le dénombrement des arrangements . . . . .	485
12.1.3	Les coefficients binomiaux . . . . .	486
12.2	Les probabilités conditionnelles . . . . .	488
12.3	Exercices issus des annales des concours . . . . .	496
12.4	Les solutions des exercices . . . . .	498
<b>13</b>	<b>Les variables aléatoires discrètes</b>	<b>511</b>
13.1	Les généralités . . . . .	511
13.1.1	La loi de probabilité . . . . .	512
13.1.2	La fonction de répartition . . . . .	513
13.1.3	Les moments d'une variable aléatoire . . . . .	514
13.2	Les lois discrètes classiques . . . . .	518
13.2.1	La loi uniforme . . . . .	518
13.2.2	La loi de Bernoulli . . . . .	519
13.2.3	La loi binomiale . . . . .	520
13.2.4	La loi géométrique . . . . .	521
13.2.5	La loi de Pascal . . . . .	523
13.2.6	La loi hypergéométrique . . . . .	523
13.2.7	La loi de Poisson . . . . .	524
13.3	Exercices issus des annales des concours . . . . .	525
13.4	Les solutions des exercices . . . . .	533
<b>14</b>	<b>Les variables aléatoires continues</b>	<b>559</b>
14.1	La fonction de répartition et la densité . . . . .	559
14.2	Le transfert . . . . .	563
14.3	Les moments . . . . .	564
14.4	Les lois continues classiques . . . . .	566
14.4.1	La loi uniforme . . . . .	566
14.4.2	La loi exponentielle . . . . .	568
14.4.3	Les lois normales . . . . .	570
14.5	Exercices issus des annales des concours . . . . .	574
14.6	Les solutions des exercices . . . . .	579

<b>15 Les couples de variables aléatoires discrètes</b>	<b>599</b>
15.1 Les couples de variables aléatoires discrètes . . . . .	599
15.1.1 La loi conjointe et les lois marginales . . . . .	599
15.1.2 Les lois conditionnelles . . . . .	603
15.2 L'indépendance de variables aléatoires réelles . . . . .	603
15.3 Une variable aléatoire fonction de deux variables aléatoires . . .	605
15.4 Exercices issus des annales des concours . . . . .	609
15.5 Les solutions des exercices . . . . .	613
<b>16 La convergence et l'estimation</b>	<b>629</b>
16.1 La convergence . . . . .	629
16.1.1 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	629
16.1.2 La loi faible des grands nombres . . . . .	630
16.1.3 Le théorème de la limite centrée . . . . .	632
16.1.4 Les approximations des lois usuelles . . . . .	634
16.2 L'estimation ponctuelle . . . . .	636
16.3 L'estimation par intervalle de confiance . . . . .	641
16.3.1 L'intervalle de confiance d'une proportion . . . . .	642
16.3.2 L'intervalle de confiance de l'espérance d'une loi normale, l'écart-type étant connu . . . . .	643
16.3.3 L'intervalle de confiance de l'espérance d'une loi normale, l'écart-type étant inconnu . . . . .	644
16.3.4 L'intervalle de confiance de la variance d'une loi normale, l'espérance étant connue . . . . .	645
16.3.5 L'intervalle de confiance de la variance d'une loi normale, l'espérance étant inconnue . . . . .	646
16.4 Exercices issus des annales des concours . . . . .	647
16.5 Les solutions des exercices . . . . .	651
<b>17 Les statistiques</b>	<b>665</b>
17.1 Les séries à un caractère . . . . .	665
17.1.1 Les fréquences et les fréquences cumulées . . . . .	665
17.1.2 Les caractéristiques de tendance centrale . . . . .	666
17.1.3 Les caractéristiques de dispersion . . . . .	671
17.1.4 Les caractéristiques de concentration . . . . .	672
17.2 Les séries à deux caractères . . . . .	675
17.2.1 Les tableaux de contingence . . . . .	675
17.2.2 Les caractéristiques des séries à deux caractères . . . . .	678
17.2.3 La liaison entre deux variables . . . . .	681
17.2.4 Les séries chronologiques . . . . .	685
17.3 Les solutions des exercices . . . . .	693