Thierry Rougé
Patrick Cabau

12 thèmes mathématiques indispensables

L1
Écoles d'ingénieurs
B.U.T.

- Thèmes variés
- Cours
- Formulaire complet

ellipses

T1 | Logique formelle

C'est à Euclide que l'on doit dans son remarquable traité *Les éléments* les fondements de la logique mathématique [1]. En 1847, George Boole [2] dans son ouvrage *Mathematical Analysis of Logic*, développe une nouvelle forme de logique [3] à la fois symbolique et mathématique.

1.1 Axiomes, assertions, prédicats et quantificateurs

Une *assertion* ou une *proposition* mathématique est un énoncé qui ne peut prendre que deux valeurs logiques

- vrai (V)
- faux (F)

et ce, sans ambigüité dans le cadre d'une théorie fondée sur un ensemble d'*axiomes*.

Exemple 1.– $\sqrt{2} > 1$ est une assertion vraie.

Exemple 2.– $\mathrm{e} = 2,718$ est une assertion fausse [4].

Un *axiome* est une assertion considérée vraie *a priori* dans le but de constituer un environnement mathématique premier, fondement sur lequel une théorie mathématique va être construire.
Plus précisément, on se propose d'obtenir de nouvelles assertions à partir des axiomes de la théorie à l'aide de *démonstrations* utilisant des règles de logique.

1. Euclide, mathématicien grec de l'Antiquité (*circa* 300 av. J.-C.), est l'auteur de l'un des plus anciens traités de Mathématiques, *Les éléments* dans lequel il présente des théorèmes, fondés sur des axiomes et postulats, et les démonstrations associées en géométrie et en arithmétique.

2. George Boole (1815–1864), mathématicien anglais, créateur de la logique moderne dénommée algèbre de Boole en son honneur.

3. Il existe d'autres types de logique où le principe de bivalence (toute proposition ne peut avoir qu'une seule des valeurs vrai ou bien faux) est remis en cause, e.g. la logique floue (ang. *fuzzy logic*) où une proposition est vraie selon un certain degré de probabilité.

4. $2,718$ n'est que le début du développement décimal illimité non périodique du réel e, base du logarithme népérien.

Exemple 3.– La géométrie plane est fondée sur les axiomes d'Euclide.

$\mathscr{P}$ est un *prédicat* à une variable x, où x appartient à un certain *référentiel* $\mathscr{R}$, si, pour tout élément x de $\mathscr{R}$, $\mathscr{P}(x)$ est une assertion.

Exemple 4.– Pour $\mathscr{R} = \mathbb{N}$, on définit le prédicat $\mathscr{P}$, où pour tout entier naturel n, l'assertion $\mathscr{P}(n)$ est : $2^n > n^2$.
$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont des assertions vraies ($2^0 > 0^2$ et $2^1 > 1^2$) alors que $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$ sont fausses.
On peut démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Au prédicat $\mathscr{P}$ à une variable x appartenant au référentiel $\mathscr{R}$, on peut associer deux nouvelles assertions :

- la première qui s'écrit : $\forall x, \mathscr{P}(x)$ à l'aide du *quantificateur universel* $\forall$ et qui s'énonce :
  « l'assertion $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout x du référentiel $\mathscr{R}$ » ;
- la seconde qui s'écrit : $\exists x, \mathscr{P}(x)$ à l'aide du *quantificateur existentiel* $\exists$ et qui s'énonce :
  « il existe au moins un élément x du référentiel $\mathscr{R}$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(x)$ soit vraie ».

1.2 Opérateurs logiques de base

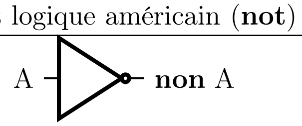
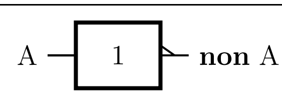
1.2.1 Opérateur de négation (non)

On peut associer à l'assertion A sa *négation* notée non A ou $\overline{A}$ dont on définit la valeur logique en fonction de la valeur logique de A à l'aide de la *table de vérité* suivante

A	**non** A
0	1
1	0

Exemple 5.– La négation de l'assertion (n est pair) est (n est impair).

L'opérateur de *négation* est représenté graphiquement par

port logique américain (**not**)	port logique européen
	

1.2.2 Opérateur d'union inclusive (ou)

Étant données deux assertions A et B, on définit la *disjonction* de A et de B, notée A **ou** B à l'aide de sa table de vérité

A	B	A **ou** B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemple 6.– Le produit $x.y$ est nul si $(x = 0)$ **ou** $(y = 0)$, étant entendu que les deux réels x et y peuvent être tous deux nuls (inclusivité du **ou**), ce qui correspond ici aux 3 cas :

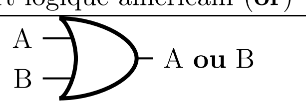
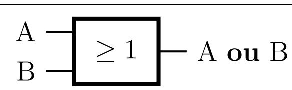
- $x = 0$ et $y \neq 0$;
- $x \neq 0$ et $y = 0$;
- $x = 0$ et $y = 0$.

Exemple 7.– Principe du tiers exclus.
La table de vérité de A **ou non** A est

A	**non** A	A **ou non** A
0	1	1
1	0	1

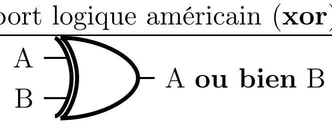
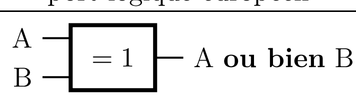
L'assertion composée A **ou non** A est toujours vraie[5] ; on dit que c'est une *tautologie*.

L'opérateur d'*union* (inclusive) est représenté graphiquement par

port logique américain (**or**)	port logique européen
	

1.2.3 Opérateur d'union exclusive (ou bien)

L'opérateur d'*union exclusive* est représenté graphiquement par

port logique américain (**xor**)	port logique européen
	

5. Une assertion composée qui est toujours fausse est appelée *antilogie*.

La table de vérité de cet opérateur est

A	B	A **ou bien** B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exemple 8.– $(x > 2)$ **ou bien** $(x = 2)$ est l'assertion $(x \geqslant 2)$.

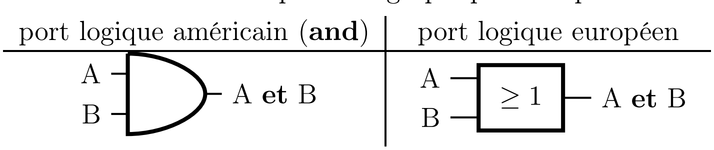
1.2.4 Opérateur d'intersection (et)

Étant données deux assertions A et B, on définit la *conjonction* de A et de B, notée A **et** B, à l'aide de sa table de vérité

A	B	A **et** B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple 9.– Soit n un entier naturel.
La conjonction des assertions (n est un multiple de 2) et (n est un multiple de 3) est (n est un multiple de 2 et de 3) ou encore, en utilisant un résultat d'arithmétique[6], puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, (n est un multiple de 6).

L'opérateur d'*intersection* est représenté graphiquement par



1.3 Implication, contraposée et réciproque

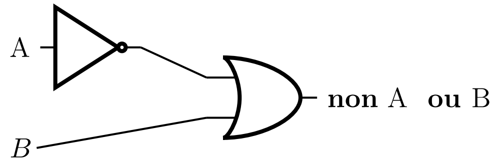
L'implication $A \implies B$ correspondant à **non** A **ou** B et a pour table de vérité

A	B	**non** A	**non** A **ou** B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

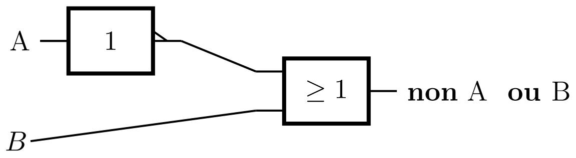
6. Corollaire du théorème de Gauss.

Elle peut être représentée

- à l'aide de combinaison de ports logiques américains par (**implies**)



- à l'aide de combinaison de ports logiques européens par



L'implication a pour table de vérité

A	B	$A \implies B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

L'implication permet d'obtenir à partir d'une assertion vraie une autre assertion vraie :

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{c} A \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ A \implies B \text{ est vraie} \end{array}\right. \quad \text{alors } B \text{ est vraie.}$$

La *réciproque* de l'implication $A \implies B$ est $B \implies A$.

Exemple 10.– Soient A, B et C trois points distincts du plan.
Le théorème de Pythagore traduit la véracité de l'implication

$$(ABC \text{ est un triangle rectangle en } A) \implies (AB^2 + AC^2 = BC^2).$$

La réciproque du théorème de Pythagore traduit la véracité de l'implication réciproque

$$(AB^2 + AC^2 = BC^2) \implies (ABC \text{ est un triangle rectangle en } A).$$

Exemple 11.– La réciproque de l'implication (vraie) $(x = 2 \implies x^2 = 4)$ est l'implication[7] (fausse) $(x^2 = 4 \implies x = 2)$.

La *contraposée* de l'implication $A \implies B$ est **non** $B \implies$ **non** A et correspond à **non**(**non** B) **ou non** A, i.e. à B **ou non** A ou encore à **non** A **ou** B et l'on retrouve $A \implies B$.

7. En fait, c'est l'implication $\big(x^2 = 4 \implies (x = 2)$ **ou** $(x = -2)\big)$ qui est vraie.

Exemple 12.– La contraposée de l'implication (vraie)

$$(x = 2 \implies x^2 = 4)$$

est l'implication (tout aussi vraie)

$$(x^2 \neq 4 \implies x \neq 2).$$

1.4 Équivalence

Deux assertions A et B sont *équivalentes*, ce que l'on note $A \iff B$ si

$$(A \implies B) \textbf{ et } (B \implies A).$$

On a alors la table de vérité suivante :

A	B	**non** A	**non** B	**non** A **ou** B	**non** B **ou** A	$A \iff B$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

Deux assertions équivalentes sont vraies ensemble et fausses ensemble.

Exemple 13.– Si x et y sont des réels, on a l'équivalence [8] :

$$x.y = 0 \iff (x = 0 \textbf{ ou } y = 0).$$

1.5 Propriétés

A, B et C désignent des propositions.

Proposition 1. Lois de Morgan

1. **non** $(A$ **et** $B) \iff ($**non** $A)$ **ou** $($**non** $B)$
2. **non** $(A$ **ou** $B) \iff ($**non** $A)$ **et** $($**non** $B)$.

Exemple 14.– $\textbf{non}(x > 1 \textbf{ ou } x < -1) \iff (x \leqslant 1 \textbf{ et } x \geqslant -1)$
ce qui se traduit par : $\textbf{non}(|x| > 1) \iff (|x| \leqslant 1)$.

Proposition 2. Associativité de **et** et de **ou**

1. $\big((A \textbf{ ou } B) \textbf{ ou } C\big) \iff \big(A \textbf{ ou } (B \textbf{ ou } C)\big)$
2. $\big((A \textbf{ et } B) \textbf{ et } C\big) \iff \big(A \textbf{ et } (B \textbf{ et } C)\big)$

8. Un produit de réels est nul si et seulement si l'un au moins de ces réels est nul.

Proposition 3. Distributivité

1. $\big(A \textbf{ ou } (B \textbf{ et } C)\big) \Longleftrightarrow \big((A \textbf{ et } C) \textbf{ ou } (B \textbf{ et } C)\big)$
2. $\big(A \textbf{ et } (B \textbf{ ou } C)\big) \Longleftrightarrow \big((A \textbf{ ou } C) \textbf{ et } (B \textbf{ ou } C)\big)$.

Proposition 4. Transitivité de l'implication

$\big((A \implies B) \textbf{ et } (B \implies C)\big) \implies (A \implies C)$.

1.6 Divers types de raisonnements mathématiques

1.6.1 Démonstration par déduction

Proposition 5. Démonstration par déduction

$$\big((P \text{ vraie}) \textbf{ et } (P \implies Q \text{ vraie})\big) \implies (Q \text{ vraie})$$

1.6.2 Implication et équivalence

Proposition 6.

$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow \big((P \implies Q) \textbf{ et } (Q \implies P)\big)$

Exemple 15.– On peut utiliser la proposition ci-dessus pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F : on se ramène à prouver l'équivalence $(P \Longleftrightarrow Q)$ où

- les éléments de E sont caractérisés par la propriété P ;
- les éléments de F sont caractérisés par la propriété Q.

Pour démontrer l'égalité $E = F$, il faut et il suffit de démontrer la double inclusion

- $E \subset F$, correspondant à $(P \implies Q)$;
- $F \subset E$, correspondant à $(Q \implies P)$.

1.6.3 Raisonnement par disjonction des cas

Ce mode de raisonnement est fondé sur la proposition suivante :

Proposition 7. Raisonnement par disjonction des cas

$$\big((P \textbf{ ou } Q) \textbf{ et } (P \implies Q) \textbf{ et } (Q \implies R)\big) \implies R.$$

Exemple 16.– Montrons par disjonction des cas que, pour tout entier naturel n, $n(n+1)$ est pair (correspondant à R) .

1. Premier cas.– n est pair (correspondant à P).
   Il existe alors un entier k tel que $n = 2k$.
   On a donc $n(n+1) = 2k(2k+1)$ qui est bien un nombre pair.
2. Second cas.– n est impair (correspondant à Q).
   Il existe un entier ℓ tel que $n = 2\ell + 1$.
   On a alors $n(n+1) = (2\ell+1)(2\ell+2) = 2(2\ell+1)(\ell+1)$ qui est également un nombre pair.

Dans les deux cas (n est pair **ou bien** n est impair), on a montré que $n(n+1)$ était pair.

1.6.4 Raisonnement par contraposition

Proposition 8. Raisonnement par contraposition

$$(P \implies Q) \iff (\textbf{non } Q \implies \textbf{non } P)$$

Exemple 17.– Démonstration de l'injectivité de f.
On a l'équivalence :

$$\big(a \neq b \implies f(a) \neq f(b)\big) \iff \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$$

1.6.5 Raisonnement par l'absurde

On considère deux propositions P et Q et l'on souhaite démontrer que $P \implies Q$.
Le *raisonnement par l'absurde*[9] consiste à supposer que P est vraie et que Q est fausse.
On aboutit alors, en raisonnant par déduction, à une contradiction.
On en déduit ainsi que Q est nécessairement vraie.

9. Lat. *reductio ad absurdum.*