Guillaume **Voisin**

35 PROBLÈMES MATHÉMATIQUES POUR EXPLORER LA VIE COURANTE

ellipses

LES 35 PROBLÈMES

1

La flèche atteindra-t-elle la cible ?

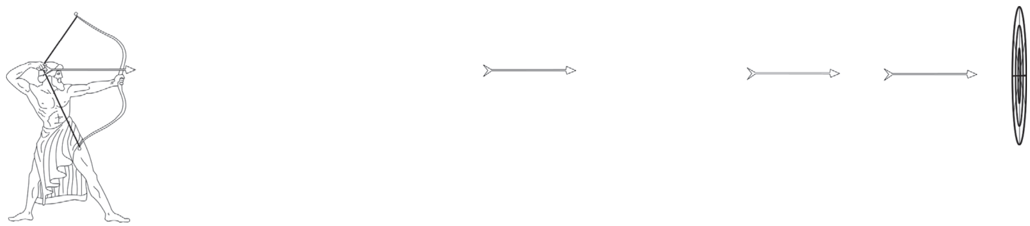
Au V^{e} siècle avant J.-C., l'école d'Élée réunissait des philosophes de la Grèce antique. Parmi leurs réflexions se trouvent la logique, la dialectique, l'être et la recherche de vérité, la stabilité du mouvement, l'infini, etc. C'est dans ce contexte que Zénon propose des paradoxes qui mettent en lumière une incompatibilité entre la réalité observée et la logique. Ces paradoxes étaient de vrais problèmes pour les philosophes antiques jusqu'au développement des mathématiques du XVII^{e} siècle avec Descartes et Leibniz.

On vous propose d'étudier deux paradoxes : celui de la dichotomie et celui d'Achille et la tortue.

Paradoxe de la dichotomie

Zénon tire une flèche vers une cible. Pour atteindre la cible, la flèche doit d'abord parcourir la moitié de la distance entre Zénon et la cible. Elle parcourt ensuite la moitié de la distance restante, puis la moitié de la distance restante, etc. La flèche aura donc besoin d'une infinité d'étapes pour atteindre la cible. Zénon en conclut qu'elle n'atteindra jamais la cible. Comment est-ce possible ?

On vous propose de calculer le temps nécessaire à la flèche pour parcourir cette infinité d'étapes.



On notera d la distance entre Zénon et la cible. On supposera que la flèche parcourt la distance de manière linéaire (en ligne droite) et à une vitesse constante que nous noterons v.

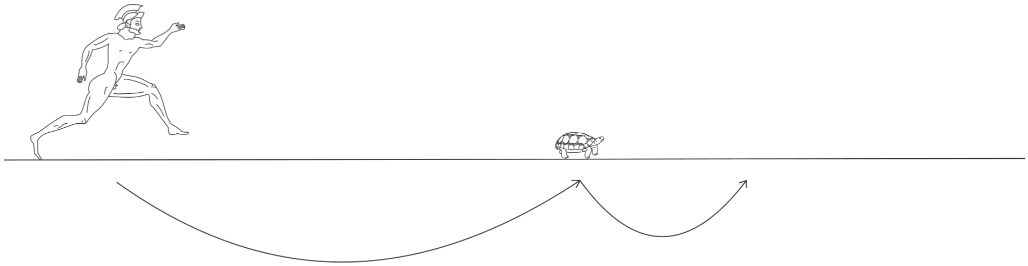
1) Commençons par justifier que la flèche atteint la cible en une infinité d'étapes.
   a) Indiquez la distance parcourue à la première étape du raisonnement. Puis la distance parcourue à la deuxième étape. Donner alors la distance parcourue à la k-ième étape du raisonnement.
   b) En déduire la distance totale parcourue au bout de n étapes. ↠ *Indice 1*
   c) Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?
2) Calculons maintenant le temps nécessaire pour parcourir la distance totale.
   a) Donnez le temps nécessaire à la flèche pour parcourir la k-ième étape du raisonnement. ↠ *Indice 2*
   b) Calculez le temps nécessaire à la flèche pour parcourir la distance totale au bout de n étapes. ↠ *Indice 3*
   c) En déduire le temps nécessaire à la flèche pour atteindre la cible. ↠ *Indice 4*

Aspects historiques

Zénon avait présenté ce paradoxe avec le lancer d'une pierre vers un arbre. Un autre paradoxe de la flèche tirée vers une cible permettait d'expliquer qu'elle est immobile en vol à chaque instant. La flèche est donc tout le temps immobile et ainsi le temps n'existe pas.

Paradoxe d'Achille et la tortue

Achille dispute une course à pied avec une tortue. Achille étant bon coureur, il court plus vite que la tortue. Il laisse donc une avance à la tortue. Au bout d'un certain temps, Achille aura parcouru la distance qui le séparait de la tortue. Mais pendant ce temps, la tortue aura avancé. Achille continue à courir pour parcourir la nouvelle distance qui le sépare de la tortue, mais encore une fois la tortue aura avancé. *Et cætera*. Finalement Achille ne rattrapera jamais la tortue. Comment est-ce possible ?



On notera d_0 la distance qui sépare Achille de la tortue au départ. On supposera qu'Achille court à une vitesse constante de v_A et pareil pour la tortue à une vitesse v_T.

1) Quel est le temps t_1 nécessaire pour réaliser la première étape du raisonnement ?
   Au bout de cette première étape, quelle est la distance entre Achille et la tortue ? On notera cette distance d_1. ↠*Indice 5*
2) Si d_n est la distance entre Achille de la tortue au bout de n étapes, que vaut alors la distance d_{n+1} entre Achille et la tortue au bout de $n+1$ étapes ? Quel est le temps t_{n+1} nécessaire pour cette $n+1$-ième étape ?
3) En déduire des expressions de d_n et t_n en fonction de v_A, v_T, n et d_0. ↠*Indice 6*
4) Quel est le temps total T_n nécessaire pour réaliser les n premières étapes ? ↠*Indice 7*
5) Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?

Pour aller plus loin

Ces deux paradoxes ont la même représentation du réel. Ils séparent le temps et l'espace en une infinité de moments et de distances de plus en plus petits. L'infinité étant difficilement atteignable, la conclusion des philosophes antiques était l'impossibilité de l'action. Pour répondre à cette problématique, certains philosophes antiques supposaient qu'il est impossible de diviser à l'infini le temps et l'espace.

Cependant, les mathématiques modernes permettent d'étudier les limites de suites et de sommes. Notamment qu'une somme infinie peut être finie. On arrive donc à montrer qu'il est possible de réaliser une infinité d'étapes en un temps fini.

Les débats philosophiques sur la perception de la réalité, la continuité, le fini et l'infini ne sont pas terminés.

2 Avez-vous les mêmes empreintes qu'un autre ?

Pour identifier de manière certaine une personne, plusieurs paramètres biométriques peuvent être utilisés. Par exemple la reconnaissance faciale, la reconnaissance de l'iris ou les empreintes digitales.

Une empreinte digitale est le dessin formé par les sillons et crêtes présents sur les doigts, aussi appelés dermatoglyphes. Ces dessins se forment dès les premières semaines de vie du fœtus et sont uniques pour chaque individu, même pour des vrais jumeaux.

On vous propose d'étudier les différentes empreintes et de calculer la probabilité d'avoir des empreintes similaires à celles d'un autre individu.

Pour décrire une empreinte digitale, on les classe suivant leur structure globale et selon des points singuliers locaux, appelés « minuties ». De plus, chaque minutie a une localisation sur le doigt et une orientation.

Structure globale

Il existe 5 structures globales dont 3 principales. Voici les pourcentage d'apparition :

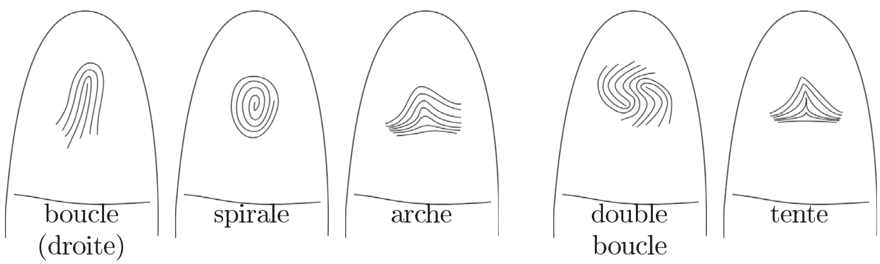
- ⊙ les boucles, gauches ou droite : 60%,
- ⊙ les spirales : 30%,
- ⊙ les arches : 5%,
- ⊙ les double boucles et tentes sont plus rares.

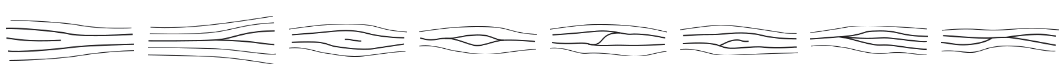
Points singuliers locaux

Une minutie est une configuration localisée des sillons et crêtes. Il existe 2 types principaux :

- ⊙ la terminaison ou arrêt de ligne est la fin d'une crête,
- ⊙ la bifurcation est une crête qui se dédouble.

Grâce à ces deux minuties, on peut obtenir des : îlots, lacs, ponts, crochets, trifurcations, bifurcations opposées, etc.





Dénombrement

Considérons un cas simplifié où, à un emplacement donné du doigt, il y a soit aucune minutie particulière, soit une terminaison, soit une bifurcation et ce dans deux orientations possibles : haut ou bas.

1) Combien y a-t-il de configurations possibles pour un emplacement sur un doigt ? *↠Indice 1*
2) Combien y a-t-il de configurations possibles pour un doigt entier sur lequel on étudie 12 emplacements donnés ? *↠Indice 2*
3) Combien d'emplacements faut-il considérer pour que le nombre de configurations possibles dépasse la population mondiale en 2022 : 8 milliards ? *↠Indice 3*

Législation et nombre de minuties

Nos empreintes sont rarement visibles entièrement lorsqu'on laisse une trace involontairement. Le nombre de minuties observées est donc limité.

L'empreinte digitale complète d'un doigt est composée d'une centaine de minuties. Lors de la création du fichier automatisé des empreintes digitales (FAED), 15 minuties principales sont enregistrées. Les détecteurs d'empreintes de nos téléphones portables sont capables de détecter quelques dizaines de minuties. Lorsque nous touchons une surface, nous laissons une empreinte partielle, le nombre de minuties exploitables est alors très réduit. C'est le problème dans le cas des enquêtes de police.

Dans la législation française, il suffit de 12 minuties identiques et aucune discordance pour attribuer de manière sûre l'empreinte à un individu. Aux USA, c'est 8 minuties ; en Italie, c'est 16 minuties.

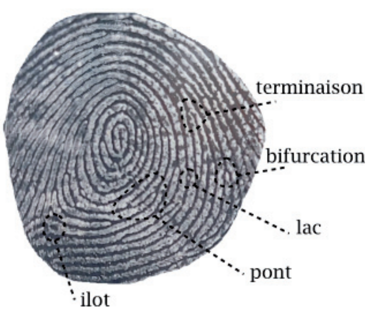
Parmi les minuties présentes sur un doigt, les terminaisons et les bifurcations n'apparaissent pas avec les mêmes fréquences selon le sexe de l'individu. Le tableau ci-contre indique les pourcentages d'apparition. On sait également qu'il y a 50,4% d'hommes et 49,6% de femmes.

	hommes	femmes
terminaison	53,9%	54,7%
bifurcation	46,1%	45,3%

Calculs de probabilités

Dans cette partie, on ne prendra pas en compte la structure globale des empreintes. Considérons que le type d'une minutie est aléatoire ainsi que le sexe des individus.

On note F lorsque l'individu est une femme, H lorsque c'est un homme. On note T lorsque la minutie est une terminaison et B pour une bifurcation.



1) Pour l'observation d'une minutie, rappelez la probabilité que ce soit une terminaison si c'est le doigt d'une femme et la probabilité si c'est le doigt d'un homme.
   Conclure en calculant la probabilité que la minutie observée soit une terminaison. *↠Indice 4*
2) Calculez la probabilité qu'une minutie observée soit une bifurcation. *↠Indice 5*

On souhaite comparer les empreintes d'un doigt de deux individus indépendants.

3) On observe une minutie particulière à la même localisation sur les deux doigts.
   a) Quelle est la probabilité que les deux minuties aient la même orientation ? *↠Indice 6*
   b) Quelle est la probabilité que les deux minuties soient du même type ? *↠Indice 7*
   c) En considérant que le type de minutie et son orientation sont indépendants, calculer la probabilité que les deux minuties soient identiques, c'est-à-dire même type et même orientation.
4) On divise le doigt en 100 zones qui peuvent contenir au maximum une minutie. On considère que les minuties peuvent apparaître équitablement dans chaque zone et que le type et l'orientation des minuties sont indépendants de la localisation.
   a) Quelle est le nombre de manières que 14 minuties apparaissent dans ces 100 zones ? *↠Indice 8*
   b) Quelle est la probabilité que les deux empreintes aient les mêmes 14 localisations pour les 14 minuties observées sur les deux doigts ? *↠Indice 9*
5) En déduire la probabilité que les deux doigts dont on a observé 14 minuties soient identiques. *↠Indice 10*

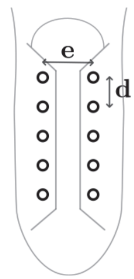
3 Comment lacer ses chaussures ?

Heureusement les vendeurs de chaussures lacent les chaussures en avance et nous n'avons pas besoin de le faire nous-même. Si vous deviez le faire, comment laceriez-vous vos chaussures ? Savez-vous qu'il y a plusieurs manières de le faire ? Combien y a-t-il de manières de lacer ses chaussures ?

On vous propose de réfléchir au nombre de manières de lacer ses chaussures.

Précisions sur le laçage

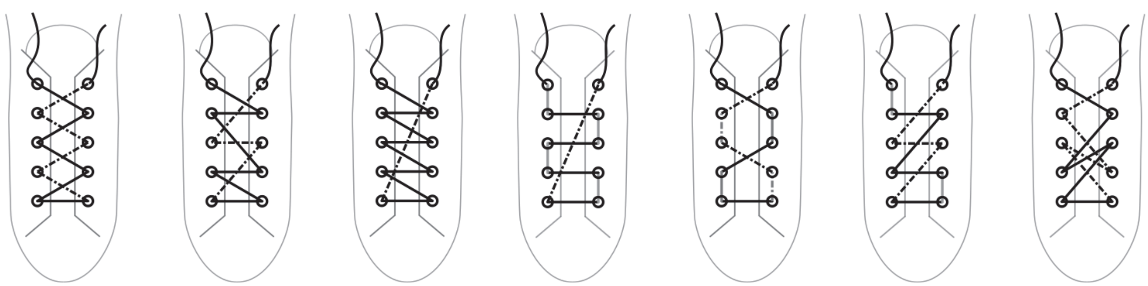
Posons quelques conditions raisonnables pour correspondre au plus près de la réalité du laçage de chaussure.



- On suppose qu'une chaussure contient deux rangées parallèles de n œillets espacés verticalement d'une distance de d cm et espacés horizontalement d'une distance de e cm.
- Le bout de la chaussure sera appelé le bas. Le côté de la cheville est appelé le haut.
- Un laçage de la chaussure est le fait de passer un lacet à travers tous les œillets. Le laçage débute par un des deux œillets du haut et finit par l'autre.
- On suppose que le lacet ne passe qu'une fois par chaque œillet et que cela n'a pas d'importance s'il passe par l'extérieur ou l'intérieur. Le lacet est en ligne droite entre deux œillets. Lorsque deux parties du lacet se croisent, il n'y a pas d'importance si l'un passe dessus ou dessous l'autre.
- On ne prendra en compte que des laçages où le lacet commence par une étape strictement descendante. Puis le lacet effectue des étapes descendantes ou de même niveau en alternant d'une rangée à l'autre. Le lacet ne peut pas effectuer d'étape de remontée avant d'arriver en bas.

  Puis, arrivé en bas, le lacet remonte par les œillets non utilisés en alternant d'une rangée à l'autre.

Dans les exemples présentés ci-dessous, seuls les trois premiers (zigzag, européen et gavage) correspondent à la situation décrite ci-dessus que nous étudierons.

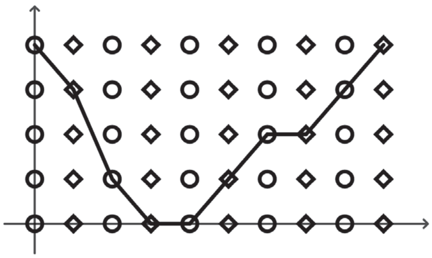


zigzag européen gavage plat papillon en Z treillis

1) Justifiez que les deux œillets du bas sont forcément reliés directement. ↠ *Indice 1*
2) Pour une chaussures de $2n$ œillets, indiquez le nombre de segments de lacet entre œillets.

↠ *Indice 2*

Modélisation et dénombrement



Pour mieux compter le nombre de laçages possibles, nous utiliserons une représentation par une courbe. Pour éviter de devoir tracer le lacet en alternant un passage à droite et un passage à gauche, on duplique autant de fois que nécessaire les colonnes d'œillets.

Les colonnes impaires sont donc des répliques des œillets de gauche (en rond), les colonnes paires des répliques des œillets de droite (en carré).

Un laçage est donc une courbe partant de l'œillet en haut à gauche et finissant à l'œillet en haut à droite.

1) À titre d'exercice pour bien comprendre cette représentation, dessinez les courbes associées aux laçages zigzag, européen et gavage pour deux colonnes de 5 œillets. *↠Indice 3*
2) Pour $2n$ œillets, indiquez le nombre de colonnes de cette grille d'œillets et listez les propriétés que doit respecter cette courbe. *↠Indice 4*
3) Si vous connaissez la partie descendante du lacet, justifiez que vous connaissez toute la courbe.
4) Listons les différents nombres de hauteurs par lesquelles le lacet passe dans sa descente.
   a) Si le lacet passe directement du haut au bas, combien y a-t-il de courbes possibles ?
   b) Si le lacet passe par une unique hauteur intermédiaire entre le haut et le bas, combien y a-t-il de courbes possibles ? *↠Indice 5*
   c) Si le lacet passe par deux hauteurs intermédiaires, combien y a-t-il de courbes possibles ? *↠Indice 6*
   d) Si le lacet passe par k hauteurs intermédiaires, combien y a-t-il de courbes possibles ? Quelles sont les valeurs possibles pour cette valeur k ? *↠Indice 7*
5) Finalement, indiquez le nombre de laçages possibles. *↠Indice 8*

Longueur de lacet

1) Calculez la longueur du lacet pour une chaussure de 2×5 œillets dans le cas d'un laçage zigzag. Donnez sa longueur dans le cas de $2n$ œillets. *↠Indice 9*
2) Calculez la longueur du lacet pour une chaussure de 2×5 œillets dans le cas d'un laçage européen.
   Donnez sa longueur dans le cas de $2n$ œillets avec n impair. La laçage européen alterne entre une horizontale et une descente (ou montée) de 2 œillets. Il y a une descente (ou montée) de 1 œillet si nécessaire.
   Comparez les longueurs de lacet entre zigzag et européen. *↠Indice 10*
3) Calculez la longueur du lacet pour une chaussure de 2×5 œillets dans le cas d'un laçage gavage. Donnez sa longueur dans le cas de $2n$ œillets. *↠Indice 11*

Pour aller plus loin

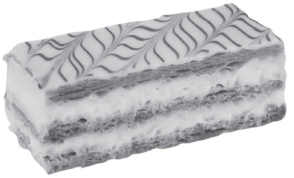
D'autres contraintes de laçage peuvent aussi être prises en compte : la laçage doit vraiment tenir la chaussure, il ne doit pas être trop dur à serrer, etc.

Une étude poussée a été menée en 2002 sur le nombre de laçages avec d'autres conditions. Le résultat pour $2n$ œillets est $\frac{(n!)^2}{2} \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{k}^2$. Pour $n = 5$, cette formule donne 51840 laçages possibles, contre 27 pour notre dénombrement.

4 Combien y a-t-il de feuilles dans un mille-feuille ?

D'après la définition du Larousse, le mille-feuille est « un gâteau fait d'abaisses de feuilletage séparées par des couches de crème pâtissière et poudré de sucre glace ». Autrement dit, il y a 3 couches de pâte feuilletée séparées par de la crème pâtissière.

Le nom de ce gâteau fait évidemment référence à l'impression qu'il y a beaucoup de feuilles. Mais y en a-t-il vraiment 1000 ? C'est ce que nous vous proposons d'étudier.



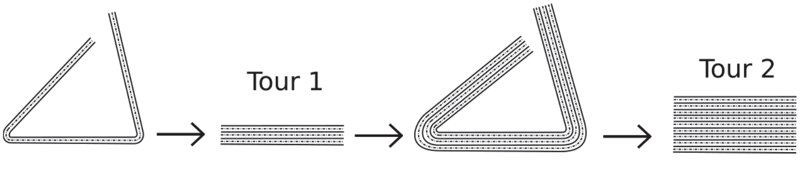
Recette de la pâte feuilletée

Pour réaliser une pâte feuilletée, il y a plusieurs étapes.

- Il faut faire un mélange de farine, de sel et d'eau pour obtenir une pâte appelée détrempe. On l'étale en forme de rectangle ce qui donne une abaisse.
- Du beurre ou de la margarine est alors étalé sur cette abaisse et elle est alors repliée en deux. On obtient donc une couche de beurre eu milieu de deux couches de détrempe.
- Vient l'étape du tourage dont le principe est de replier l'abaisse sur elle-même plusieurs fois. Il existe cependant plusieurs méthodes.
  - Tourage simple : replier l'abaisse en deux, réétaler puis répéter cette opération 6 fois.
  - Tourage traditionnel : replier l'abaisse en trois parties (les tiers de droite et de gauche sur le tiers central), réétaler puis répéter cette opération 6 fois.
  - Tourage double : replier l'abaisse en 4 parties (plier en deux puis encore en deux), réétaler et répéter cette opération 6 fois.

  Le nombre de tours peut également varier.

Rappelons que lorsque deux couches de détrempe sont l'une sur l'autre, elles fusionnent. Quant aux couches de beurre et de détrempe, elles ne fusionnent jamais, en théorie.



Afin d'écrire ces opérations de manière mathématique, notons p le nombre de parties d'abaisse qui sont repliées les unes sur les autres : 2, 3 ou 4. Notons n le nombre de tours réalisés, ainsi $n = 0$ correspond à la situation de départ où l'abaisse est repliée en deux. Finalement f_n désigne le nombre de feuilles de détrempe au n-ième tour du tourage.