

Mohammed Aassila

Prépas
Sup

350 exercices corrigés d'Analyse

avec rappels de cours

2^e édition



ellipses

TECHNIQUES

FONDAMENTALES DE CALCUL



1.1 Inégalités dans \mathbb{R}

□ On rappelle que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné, d'où :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x,$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z,$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq 0 \text{ et } y \leq 0 \implies xy \geq 0,$

□ **Valeur absolue** : soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a $|x| = \max(x, -x)$, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'inégalité triangulaire :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

□ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant $x^+ = \max\{x, 0\}$ et $x^- = \min\{-x, 0\}$ on a les relations suivantes :

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

□ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle distance de x à y le nombre $d(x, y)$ donné par : $d(x, y) = |x - y|$.

□ **Partie entière** : soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leq x < p + 1.$$

L'entier p s'appelle partie entière de x , il est noté $[x]$.

Théorème 1 : Quelques inégalités classiques

- ✓ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$
- ✓ $\forall (x, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx, \text{ (inégalité de Bernoulli),}$
- ✓ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|,$
- ✓ $\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x,$
- ✓ $\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x.$
- ✓ Inégalité entre la moyenne arithmétique et géométrique : si x_1, \dots, x_n sont des réels positifs alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

- ✓ Inégalité de Cauchy-Schwarz : soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des nombres réels, alors on a :

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2$$

avec égalité si, et seulement si, a_k et b_k sont proportionnels pour tout k .

Définition 1 : Valeurs décimales approchées

Soient x un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $p \in \mathbb{Z}$ est un entier relatif tel que

$$\frac{p}{10^n} \leq x \leq \frac{p+1}{10^n}$$

on dit que $\frac{p}{10^n}$ (resp. $\frac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision 10^{-n} .

1.2 Fonctions de la variable réelle

- Logarithme népérien : on appelle logarithme népérien, et on note \ln , l'application de $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ on a : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

- Exponentielle : Comme l'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, alors l'application \ln admet une application réciproque, appelée exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a : $e^{a+b} = e^a e^b$.

- Logarithme de base a : soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on appelle logarithme de base a , et on note \log_a l'application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

- Exponentielle de base a : on appelle exponentielle de base a , et on note \exp_a , l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* , réciproque de \log_a , elle est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y).$$

- Fonctions puissances : Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle fonction puissance d'exposant a l'application qui à $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe $x^a \in \mathbb{R}$.

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

Pour tout $(a, \alpha) \in]1, +\infty[\times \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x |x|^\alpha = 0.$$

□ Fonctions hyperboliques directes :

On appelle sinus hyperbolique l'application $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle cosinus hyperbolique l'application $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On appelle tangente hyperbolique l'application $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

On appelle cotangente hyperbolique l'application $\text{coth} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\text{coth}(x) = \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

□ Fonction arcsin : l'application $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, strictement croissante, et $\sin(-\pi/2) = -1$, $\sin(\pi/2) = 1$. Donc, l'application \sin admet une application réciproque notée $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et \arcsin est continue sur $[-1, 1]$. Ainsi, on a :

$$\forall (x, y) \in [-1, 1] \times [-\pi/2, \pi/2], \quad y = \arcsin x \iff x = \sin y.$$

L'application \arcsin est impaire, elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle.

□ Fonction arccos : l'application $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue sur $[0, \pi]$, strictement décroissante, et $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$. Donc, l'application \cos admet une application réciproque notée $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ et \arccos est continue sur $[-1, 1]$. Ainsi, on a :

$$\forall (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \pi], \quad y = \arccos x \iff x = \cos y.$$

L'application \arccos n'est ni impaire ni paire, elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in] -1, 1[.$$

Elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle.

□ Fonction arctan : l'application $\tan :] -\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $] -\pi/2, \pi/2[$, strictement croissante, et

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty.$$

Donc, l'application \tan admet une application réciproque notée $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\pi/2, \pi/2[$ et \arctan est continue sur \mathbb{R} . Ainsi, on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times] -\pi/2, \pi/2[, \quad y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

L'application \arctan est impaire, elle est dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Finalement, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Exponentielle complexe : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'exponentielle complexe de z , notée e^z , par :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

On a pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ la relation : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$. En particulier, $(e^z)^{-1} = \frac{1}{e^z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z \neq 0$.

1.3 Primitives et équations différentielles linéaires

1.3.1 Primitives

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

Définition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est dérivable en $x \in I$ si $\Re(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont dérivables en x . On pose alors : $f'(x) = (\Re(f))'(x) + i(\text{Im}(f))'(x)$.

Soit $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que F est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I telle que $F' = f$.

- ⌘ Si F est dérivable sur I , alors $F' = 0$ si, et seulement si, F est constante.
- ⌘ Soient $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ et F une primitive de f sur I . La fonction $G : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f si, et seulement si, $G - F$ est constante.
- ⌘ Soient f et g deux fonctions de I dans \mathbb{C} , F une primitive de f et G une primitive de g sur I . Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, l'application $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$.

1.3.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 3

Une équation différentielle (E) est dite linéaire du premier ordre si elle s'écrit sous la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Le terme $b(x)$ est le second membre de l'équation. Si b est nul, on dit que l'équation est sans second membre, ou homogène.

On note $(E_0) : y' + a(x)y = 0$ l'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E) .

Définition 4

Si a et b sont des constantes, on dit que l'équation est à coefficients constants. Dans ce cas, on résout l'équation sur $I = \mathbb{R}$.

- ⌘ Solution générale (forme générale des solutions) : $y = y_H + y_P$ avec

$$\begin{cases} y_H : \text{solution générale de l'équation homogène associée,} \\ y_P : \text{solution (particulière) de l'équation.} \end{cases}$$

- ⌘ Principe de superposition : si ψ_1 et ψ_2 sont respectivement solutions de

$$y' + a(t)y = b_1(t) \quad \text{et} \quad y' + a(t)y = b_2(t),$$

alors

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 \text{ est solution de } y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t), \\ \lambda\psi_1 \text{ est solution de } y' + a(t)y = \lambda b_1(t), \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Théorème 2 : Résolution

Avec la condition initiale $y_0 = y(x_0)$, la solution est donnée par :

$$y = e^{-A(x)} \left[y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt \right].$$

Théorème 3 : Cas d'une équation homogène

- ✓ Solution générale : $y = k e^{-A(x)}$, ($k \in \mathbb{C}$).
- ✓ Avec condition initiale : $y_0 = y(x_0)$; $y = y_0 e^{-(A(x)-A(x_0))}$.

✎ **Méthode d'Euler** : résolution numérique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = b(x) - a(x)y = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

On choisit le pas $h > 0$ et on définit par récurrence les suites :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h, \\ y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h \end{cases}$$

La fonction, affine par morceaux, ψ_h définie par $\psi_h(x_n) = y_n$ est une approximation de la solution ψ du problème de Cauchy. En choisissant de petites valeurs de h , on a une bonne approximation.

1.3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition 5

Une équation différentielle (E), linéaire, du second ordre et à coefficients constants est de la forme :

$$ay'' + by' + cy = \alpha(x)$$

où α est une fonction continue (appelée second membre) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Les termes a, b, c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E), on la note (E_0) .

✎ Solution générale (forme générale des solutions) :

$$y = y_H + y_P$$

avec

$$\begin{cases} y_H : \text{solution générale de l'équation homogène associée,} \\ y_P : \text{solution (particulière) de l'équation.} \end{cases}$$

✎ Principe de superposition : si ψ_1 et ψ_2 sont respectivement solutions de

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = f_2(x),$$

alors

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x), \\ \lambda\psi_1 \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = \lambda f_1(x), \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Théorème 4 : Résolution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

✓ Dans \mathbb{C} : on résout l'équation caractéristique (EC) : $aX^2 + bX + c = 0$.

★ $\Delta = 0$: on note α la solution de (EC). Solution générale :

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x}; \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

★ $\Delta \neq 0$: on note $\alpha \neq \beta$ les solutions de (EC). Solution générale :

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}; \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

✓ Dans \mathbb{R} : ($a, b, c \in \mathbb{R}$). On résout (EC) : $aX^2 + bX + c = 0$.

★ $\Delta > 0$: deux solutions réelles $\alpha \neq \beta$ pour (EC). Solution générale :

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

★ $\Delta = 0$: une solution double $\alpha \in \mathbb{R}$ pour (EC). Solution générale :

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

★ $\Delta < 0$: deux solutions imaginaires conjuguées $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Solution générale :

$$y = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Théorème 5 : Solution particulière si $f(x) = e^{mx}P(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P polynôme de degré n

Solution particulière : $\psi(x) = e^{mx}Q(x)$ où Q est un polynôme.

✓ Si $am^2 + bm + c \neq 0$, alors Q est de degré n .

✓ Si $\begin{cases} am^2 + bm + c = 0 \\ 2am + b \neq 0 \end{cases}$, alors Q est de degré $n + 1$ (le coefficient constant est indéterminé).

✓ Si $am^2 + bm + c = 2am + b = 0$, alors Q est de degré $n + 2$ (les coefficients des degrés 0 et 1 sont indéterminés).

1.4 Exercices

1.4.1 Exercices d'application directe du cours

Exercice A1

- ① Quels sont les majorants de $[0, 1]$? de $[0, 1[$?
- ② Le segment $[0, 1]$ a-t-il un maximum ? un minimum ?
- ③ L'intervalle $[0, 1[$ possède-t-il un plus grand élément ?

- ① L'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$ dans les deux cas.
- ② Le segment $[0, 1]$ possède 0 comme minimum et 1 comme maximum.

- ③ L'intervalle $[0, 1[$ ne possède pas de plus grand élément. En effet, pour tout $a \in [0, 1[$, le nombre réel $x = \frac{1+a}{2}$ vérifie $x \in [0, 1[$ et $a < x$. D'où :

$$\forall a \in [0, 1[, \quad \exists x \in [0, 1[\quad \text{tel que} \quad x > a,$$

ce qui montre que l'intervalle $[0, 1[$ ne possède pas de plus grand élément.

Exercice A2

① Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifie $\sin(x) = -\frac{1}{5}$, déterminer $\tan(x)$.

② Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifie $\cos(x) = \frac{1}{3}$, déterminer $\tan(x)$.

① Puisque $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{25}{24} = 1 + \frac{1}{24}$, alors $\tan(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{24}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$. Comme $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sont de même signe sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $\tan(x) = -\frac{\sqrt{6}}{12}$.

② De même que ci-dessus on trouve $\tan(x) = \pm 2\sqrt{2}$. Lorsque $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)$ peut être positif ou négatif, on distingue alors deux cas :

◇ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos(x) = \frac{1}{3}$, alors $\tan(x) = 2\sqrt{2}$;

◇ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ et $\cos(x) = \frac{1}{3}$, alors $\tan(x) = -2\sqrt{2}$.

Exercice A3

① Résoudre l'équation : $\sin(x) = \cos(2x)$.

② Résoudre l'inéquation : $\sin(x) \geq \sqrt{3}\cos(x)$.

- ① L'équation $\sin(x) = \cos(2x)$ est équivalente à :

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Donc, soit $2x \equiv \frac{\pi}{2} - x \pmod{2\pi}$, soit $2x \equiv -\frac{\pi}{2} + x \pmod{2\pi}$, ce qui donne respectivement $x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$, $x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. La fonction $x \mapsto \sin(x) - \cos(2x)$ est 2π -périodique, on peut caractériser l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \cos(2x)$ par son intersection avec $[0, 2\pi]$, ce qui donne l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

- ② L'inéquation $\sin(x) \geq \sqrt{3}\cos(x)$ est équivalente à $\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) \geq 0$, soit $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$.
Donc x est solution de l'inéquation si, et seulement si, $x - \frac{\pi}{3} \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, c'est-à-dire :

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi.$$

Exercice A4

Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2026}$.

D'après la formule de Moivre on a : $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2026} = \left(\exp\frac{i\pi}{3}\right)^{2026} = \exp\left(\frac{2026i\pi}{3}\right)$. Comme

$$\frac{2026\pi}{3} = \frac{(2022+4)\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi},$$

on a donc : $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2026} = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right) = -\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice A5

- ① Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- ② Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- ③ Exprimer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right[$.

① D'après la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton. On a :

$$(\cos x + i \sin x)^5 = \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x - 10 \cos^3 x \sin^2 x - 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x.$$

En identifiant les parties réelles on obtient :

$$\cos(5x) = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x.$$

En remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ dans l'expression ci-dessus on conclut que :

$$\cos(5x) = \cos^5 x - 10 \cos^3 x (1 - \cos^2 x) + 5 \cos x (1 - \cos^2 x)^2 = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x.$$

② De la même façon, et en identifiant les parties imaginaires, et puisque $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ on déduit que :

$$\sin(5x) = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x.$$

③ Comme $x \in \left]-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right[$ alors $5x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi $\tan(x)$ et $\tan(5x)$ sont bien définis et on a :

$$\tan(5x) = \frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} = \frac{5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\cos^5 x$ on conclut que :

$$\tan(5x) = \frac{5 \tan x - 10 \tan^3 x + \tan^5 x}{1 - \tan^2 x + 5 \tan^4 x}.$$