

Sophie Sidaner
Évelyne Perrin

270 exercices essentiels de mathématiques

avec indications, solutions détaillées
et résumés de cours
pour réussir les concours

PC
PC*

NOUVEAUX
PROGRAMMES



ellipses

Table des matières

1	Intégrales généralisées	11
A.	Résumé de cours	11
I.	Intégration de fonctions continues par morceaux	11
II.	Intégrales généralisées	13
III.	Fonctions intégrables	16
B.	Exercices	18
I.	Intégrales sur un segment	18
II.	Convergence et calcul d'intégrales généralisées	19
III.	Fonctions intégrables	21
C.	Solutions	24
2	Séries numériques	45
A.	Résumé de cours	45
I.	Rappel sur les séries numériques	45
II.	Compléments sur les séries numériques	46
B.	Exercices	48
I.	Exercices sur les séries numériques	48
II.	Autour de la série harmonique	53
C.	Solutions	56
3	Espaces vectoriels	87
A.	Résumé de cours	87
I.	Produit et somme d'espaces vectoriels	87
II.	Matrices par blocs et sous-espaces stables	89
III.	Trace d'une matrice, d'un endomorphisme	91
IV.	Polynôme d'endomorphismes et de matrices carrées	92
V.	Interpolation de Lagrange	93
B.	Exercices	94
I.	Espaces vectoriels	94
II.	Calcul matriciel	99

III.	Trace d'une matrice, d'un endomorphisme	100
IV.	Polynômes d'endomorphismes, de matrices	103
V.	Polynômes de Lagrange et déterminants de Vandermonde	103
C.	Solutions	106
4	Réduction des endomorphismes	147
A.	Résumé de cours	147
I.	Éléments propres	147
II.	Polynôme caractéristique	148
III.	Diagonalisation en dimension finie	149
IV.	Trigonalisation en dimension finie	151
B.	Exercices	152
I.	Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice	152
II.	Polynôme caractéristique	155
III.	Diagonalisation et trigonalisation	156
IV.	Racines carrées d'un endomorphisme, d'une matrice	158
C.	Solutions	161
5	Espaces vectoriels normés	197
A.	Résumé de cours	197
I.	Normes	197
II.	Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie	199
III.	Topologie	200
IV.	Limite et continuité en un point	201
V.	Applications continues	203
VI.	Espaces vectoriels de dimension finie	204
B.	Exercices	205
I.	Normes	205
II.	Suites vectorielles	207
III.	Topologie	208
IV.	Continuité d'applications	211
C.	Solutions	215
6	Suites et séries de fonctions	249
A.	Résumé de cours	249
I.	Modes de convergence	249
II.	Régularité de la limite d'une suite de fonctions	251
III.	Régularité de la somme d'une série de fonctions	251
IV.	Suite et séries de fonctions intégrables	253
V.	Intégrales à paramètres	254
B.	Exercices	256

I.	Suites de fonctions	256
II.	Séries de fonctions	258
III.	Suites et séries de fonctions intégrables	260
IV.	Intégrales à paramètres	262
C.	Solutions	266
7	Séries entières	305
A.	Résumé de cours	305
I.	Rayon de convergence	305
II.	Régularité de la somme	307
III.	Développement en série entière	308
B.	Exercices	310
I.	Rayon de convergence	310
II.	Développement en série entière	311
III.	Lien séries entières et équations différentielles	314
C.	Solutions	317
8	Variables aléatoires	351
A.	Résumé de cours	351
I.	Ensembles dénombrables, familles sommables	351
II.	Probabilités	353
III.	Variables aléatoires	357
B.	Exercices	360
I.	Ensembles dénombrables-Espaces probabilisables	360
II.	Probabilités	361
III.	Variables aléatoires	364
C.	Solutions	368
9	Espérance et variance	389
A.	Résumé de cours	389
I.	Espérance d'une variable aléatoire	389
II.	Variance et covariance	391
III.	Fonctions génératrices	392
IV.	Inégalités probabilistes	393
B.	Exercices	394
I.	Espérance	394
II.	Variance et covariance	396
III.	Fonctions génératrices	398
IV.	Inégalités probabilistes	399
C.	Solutions	401

10 Endomorphismes d'espace euclidien	427
A. Résumé de cours	427
I. Rappel de résultats de première année	427
II. Isométries vectorielles	428
III. Matrices orthogonales	429
IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien	430
V. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques	430
B. Exercices	432
I. Espaces euclidiens	432
II. Isométries vectorielles	433
III. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques	437
C. Solutions	443
11 Dérivabilité de fonctions vectorielles	483
A. Résumé de cours	483
I. Dérivabilité d'une fonction vectorielle	483
II. Composition et fonctions dérivables	484
III. Fonctions de classe \mathcal{C}^k	486
B. Exercices	487
I. Dérivabilité de fonctions à valeurs réelles	487
II. Dérivabilité de fonctions vectorielles	488
III. Systèmes différentiels	490
C. Solutions	491
12 Calcul différentiel	509
A. Résumé de cours	509
I. Fonctions de classe \mathcal{C}^1	509
II. Règle de la chaîne	511
III. Fonctions de classe \mathcal{C}^2	512
IV. Points critiques et extrema	513
B. Exercices	514
I. Applications de classe \mathcal{C}^1	514
II. Dérivées partielles d'ordre 2	515
III. Extrema	516
IV. Equations aux dérivées partielles	519
C. Solutions	522