

# Analyse des

RÉGIS BOURBONNAIS  
VIRGINIE TERRAZA

5<sup>E</sup> ÉDITION

# séries tempo- relles

É  
C  
C  
O  
S  
U  
P

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2022

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-083586-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Préambule	IX
Introduction	X
<b>Partie I Analyse classique des séries chronologiques</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre 1 Analyse de la saisonnalité</b>	<b>4</b>
<b>1 Détection de la saisonnalité</b>	<b>4</b>
1.1 Représentation graphique et tableau de Buys-Ballot	4
1.2 Analyse de la variance et test de Fisher	6
1.3 Fonction d'autocorrélation	9
1.4 Spectre	14
<b>2 Sélection du schéma</b>	<b>14</b>
2.1 Procédure de la bande	14
2.2 Test de Buys-Ballot	15
<b>3 Méthodes de désaisonnalisation</b>	<b>16</b>
3.1 Principe de la conservation des aires	16
3.2 Cas d'une saisonnalité rigide	17
3.3 Cas d'une saisonnalité souple	27
<b>L'essentiel</b>	<b>33</b>
<b>Chapitre 2 Prévision d'une série chronologique</b>	<b>34</b>
<b>1 Prévision d'une chronique non saisonnière</b>	<b>34</b>
1.1 Tests de détection d'une tendance	35
1.2 Recherche et correction de valeurs anormales	37
1.3 Analyse par régression	41
1.4 Lissage exponentiel	44

<b>2</b>	<b>Prévision d'une chronique saisonnière</b>	60
2.1	Analyse par régression	60
2.2	Utilisation des coefficients saisonniers	60
2.3	Prévision par lissage exponentiel de Holt-Winters	66
	<b>L'essentiel</b>	72

## Partie II Traitement des séries temporelles, réalisations de processus aléatoires 73

<b>Chapitre 3</b>	<b>Processus aléatoires stationnaires et processus ARMA</b>	77
1	Définition d'un processus stochastique	77
2	Processus stationnaires	78
2.1	Définition d'un processus stationnaire au sens strict : la stationnarité forte	78
2.2	Stationnarité d'ordre deux des processus : la stationnarité faible	79
2.3	Processus bruit blanc ( <i>white noise</i> )	79
2.4	Ergodicité	80
3	Fonction d'autocorrélation et fonction d'autocorrélation partielle	81
3.1	Fonction d'autocorrélation	81
3.2	Fonction d'autocorrélation partielle	82
3.3	Analyse des fonctions d'autocorrélation	84
4	Classe des processus aléatoires ARMA linéaires et stationnaires	90
4.1	Théorème de décomposition de Wold	90
4.2	Propriétés de l'opérateur retard	91
4.3	Définition des processus ARMA	92
4.4	Stationnarité et inversibilité des processus	95
4.5	Processus ARMA saisonniers	100
4.6	Processus ARMA non saisonniers et saisonniers à la fois	101
	<b>L'essentiel</b>	109

<b>Chapitre 4</b>	<b>Processus aléatoires dans le domaine des fréquences</b>	110
1	Filtrage linéaire d'un processus aléatoire	110
1.1	Définitions	110
1.2	Fonction de réponse impulsionnelle et fonction de réponse en fréquence du filtre	111
1.3	Fonction de transfert, fonction de gain et fonction de phase du filtre	113
1.4	Exemples de filtres linéaires	115
2	Spectre d'un processus aléatoire	125
2.1	Théorèmes de représentation	125
2.2	Spectre d'une série temporelle filtrée	126
2.3	Spectre d'une chronique ou estimateur spectral	127
2.4	Lecture d'un spectre	130
2.5	Analyse spectrale évolutive et ondelettes	135
2.6	Spectre d'un processus ARMA	137
	<b>L'essentiel</b>	146
<b>Chapitre 5</b>	<b>Processus aléatoires non stationnaires</b>	147
1	Description des processus TS et DS	147
1.1	Processus TS	148
1.2	Processus DS	148
1.3	Conséquences d'une mauvaise stationnarisation du processus	151
2	Tests de racines unitaires non saisonnières	156
2.1	Tests de Dickey-Fuller simples	157
2.2	Tests de Dickey-Fuller augmentés	162
2.3	Test de Phillips-Perron	172
2.4	Test de Dickey et Pantula (1987)	173
2.5	Test KPSS (1992)	174
2.6	Test de Elliot, Rothenberg et Stock (1996)	174
2.7	Test Ng-Perron (2001)	175
3	Tests de racines unitaires saisonnières	186
3.1	Modèles de base	187
3.2	Test de Hylleberg, Engle, Granger et Yoo (HEGY)	187
3.3	Test de Franses	189

<b>4</b>	<b>Processus ARIMA</b>	192
4.1	Processus ARIMA non saisonniers	193
4.2	Processus ARIMA purement saisonniers (modèles SARIMA)	194
4.3	Processus ARIMA non saisonniers et saisonniers à la fois	194
	<b>L'essentiel</b>	200
<b>Chapitre 6</b>	<b>Identification des processus ARMA</b>	201
<b>1</b>	<b>Caractéristiques des processus AR(<math>p</math>)</b>	201
1.1	Caractéristiques de la FAC d'un AR( $p$ )	202
1.2	Caractéristique de la FAP d'un AR( $p$ )	202
1.3	Exemple d'application	204
<b>2</b>	<b>Caractéristiques des processus MA(<math>q</math>)</b>	206
2.1	Caractéristiques de la FAC d'un MA( $q$ )	206
2.2	Caractéristiques de la FAP d'un MA( $q$ )	207
<b>3</b>	<b>Caractéristiques des processus ARMA(<math>p, q</math>)</b>	210
3.1	Caractéristiques de la FAC d'un ARMA( $p, q$ )	210
3.2	Caractéristiques de la FAP d'un ARMA( $p, q$ )	211
3.3	Synthèse	211
<b>4</b>	<b>Simulations et exercices</b>	213
4.1	Limite à l'utilisation des fonctions d'autocorrélation	213
4.2	Exercice	214
<b>5</b>	<b>Pratique de l'identification des processus</b>	221
5.1	Fonction d'autocorrélation inverse et fonction d'autocorrélation partielle inverse	221
5.2	Fonction d'autocorrélation étendue	225
5.3	Autres méthodes d'identification	230
	<b>L'essentiel</b>	231
<b>Chapitre 7</b>	<b>Estimation, tests de validation et prévision des processus ARMA</b>	232
<b>1</b>	<b>Problème de l'estimation</b>	232
1.1	Détermination et estimation de la vraisemblance des processus ARMA	233
1.2	Méthodes d'estimation	234

<b>2</b>	<b>Tests de validation</b>	235
2.1	Analyse des racines	235
2.2	Test de Student des paramètres	236
2.3	Coefficient de détermination	236
2.4	Tests sur les résidus de bruit blanc normal	236
2.5	Critères de comparaison de modèles	244
<b>3</b>	<b>Prévision</b>	247
3.1	Transformations de départ	247
3.2	Calcul du prédicteur	248
<b>4</b>	<b>Synthèse de la procédure et exercices d'application</b>	251
	<b>L'essentiel</b>	273
<b>Chapitre 8</b>	<b>Processus à mémoires longues et processus non linéaires</b>	274
<b>1</b>	<b>Processus ARFIMA et processus chaotiques</b>	275
1.1	Processus ARFIMA	275
1.2	Processus chaotiques	286
<b>2</b>	<b>Modèles non linéaires à changement de régimes</b>	293
2.1	Modèles autorégressifs à seuils	293
2.2	Tests de non-linéarité	294
<b>3</b>	<b>Modèles ARCH : présentation générale</b>	307
3.1	Modèle de régression de type ARCH	308
3.2	Test d'un modèle de type ARCH	311
3.3	Procédure d'estimation et prévision	312
3.4	Processus de type GARCH	316
3.5	Autres processus : variantes des processus ARCH	320
	<b>L'essentiel</b>	328
<b>Étude de cas</b>		329
<b>1</b>	<b>Analyse des propriétés d'un fonds</b>	329
1.1	Analyse de la stationnarité	330
1.2	Représentation ARMA du processus	331
1.3	Tests sur les résidus du modèle	332

<b>2</b>	<b>Modélisation du risque par la <i>Value at Risk</i></b>	335
2.1	Prévision de la <i>Value at Risk</i>	337
2.2	Comparaison des modèles de prévision	339
<b>Liste des exercices</b>		341
<b>Tables statistiques</b>		344
<b>Bibliographie</b>		348
<b>Index</b>		356

# Préambule

Cette 5<sup>e</sup> édition revêt un caractère très particulier et émouvant. J'ai rencontré Michel Terraza dans le milieu des années 1990 à la Commission permanente du Conseil National des Universités (CP-CNU) dans laquelle nous siégeons tous les deux.

Nous avons tout de suite sympathisé car, au-delà des valeurs humaines que nous partageons ainsi que notre goût pour la pédagogie, nous œuvrions pour une reconnaissance à leurs justes valeurs des méthodes économétriques et, particulièrement, l'analyse des séries temporelles. De par nos formations respectives et nos travaux de recherche, nous étions complémentaires, le projet de rédaction d'un livre sur ce thème s'est naturellement fait jour.

Son décès a été pour moi empreint d'une grande tristesse. J'ai perdu un excellent collègue mais beaucoup plus, un ami.

Au moment où je rédige ces quelques lignes d'avant-propos pour cette 5<sup>e</sup> édition, je suis très heureux que Virginie, sa fille, ait repris le flambeau. C'est sans doute le plus beau des hommages à la mémoire de Michel.

Régis Bourbonnais

# Introduction

Cette 5<sup>e</sup> et nouvelle édition marque la volonté d'une mise à jour permanente de ce manuel tant sur le plan des concepts de l'économétrie moderne que des applications, tout en lui conservant son aspect très pédagogique par de nombreuses applications.

Plusieurs auteurs ont reçu, ces dernières années, le prix Nobel d'économie pour leurs travaux sur les méthodes économétriques des séries temporelles et en économétrie : Robert F. Engle, Clive W. J. Granger, E. Prescott, C. A. Sims et E. G. Fama. À l'évidence, depuis une quinzaine d'années, il existe un développement sans précédent des méthodes économétriques traitant des phénomènes aléatoires générateurs de chronique. Ces méthodes sont devenues incontournables pour modéliser la structure des séries financières, des ventes ou encore des séries macro-économiques.

Dans cette nouvelle édition, une nouvelle mise en page facilite la lecture et met l'accent sur les parties importantes du cours. À la fin de chaque chapitre une synthèse est proposée.

Ce livre, qui ne traite que du cas univarié, est donc présenté en deux parties.

La partie I traite des méthodes standard de traitement des séries temporelles (méthodes de désaisonnalisation et lissage exponentiel).

Dans la partie II, la chronique est considérée comme un échantillon d'un processus aléatoire univarié ; dans cette partie sont présentés les modèles ARMA stationnaires, l'analyse spectrale, puis les problèmes de la non-stationnarité des chroniques (tests de racine unitaire). L'estimation et la validation des processus ARIMA, qui fondent l'algorithme de Box et Jenkins, sont ensuite abordées. Enfin, les modèles non linéaires (ARFIMA, SETAR, ARCH...) sont traités dans un dernier chapitre.

Ce livre fait appel à des notions d'économétrie<sup>1</sup> et de statistique d'un niveau de première année de master en Sciences économiques et financières, Gestion ou Mathématiques de la Décision. Les exposés théoriques sont illustrés par des exemples et des exercices qui permettent au lecteur de se familiariser de manière concrète à la pratique du traitement des séries chronologiques.

Nous avons voulu, par une alternance systématique de cours et d'exercices, répondre à un besoin pédagogique qui est de mettre rapidement en pratique les connaissances théoriques et ainsi d'utiliser de manière opérationnelle les acquis du cours. De surcroît, le recours à des logiciels, lors de la résolution des exercices, permet une découverte de ces outils et donne une dimension pratique que recherchent l'étudiant et le praticien. Ce manuel constitue un livre d'apprentissage facilement accessible ; c'est pourquoi les démonstrations les plus complexes font l'objet de renvois à une bibliographie plus spécialisée.

---

1. Nous recommandons au lecteur souhaitant se familiariser avec l'économétrie et désirant faire quelques exercices d'applications la lecture de BOURBONNAIS R., *Économétrie : cours et exercices corrigés*, Dunod, 11<sup>e</sup> éd., 2021.

Afin que le lecteur puisse lui-même refaire les exercices, les données utilisées (sous format Excel et Eviews) ainsi que les programmes de traitement « Batch » de Eviews et de R sont disponibles par téléchargement sur le serveur web :

**regisbourbonnais.dauphine.fr**

Ce livre s'adresse en premier lieu aux étudiants (sciences économiques, finance, gestion, mathématiques, écoles de commerce et écoles d'ingénieurs...) dont la formation requiert une connaissance dans le domaine de l'économétrie des séries temporelles. Gageons qu'il sera un support de cours indispensable et un allié précieux pour préparer les séances de travaux dirigés.

Enfin, nous exprimons toute notre gratitude à toutes les personnes – collègues et étudiants – qui ont eu la gentillesse de nous faire des commentaires et dont les conseils et les suggestions contribuent à la qualité pédagogique de ce livre. Nous restons, bien entendu, les seuls responsables des erreurs qui subsisteraient<sup>1</sup>.

---

1. Les lecteurs souhaitant faire des remarques et des commentaires peuvent nous contacter :

Régis Bourbonnais : *regis.bourbonnais@dauphine.psl.eu*

Virginie Terraza : *virginie.terraza@uni.lu*

# Analyse classique des séries chronologiques

Une série temporelle ou encore chronique est une succession d'observations au cours du temps représentant un phénomène économique (prix, ventes...) ; par hypothèse, le pas du temps des observations est considéré constant : l'heure, le jour, le mois, le trimestre, l'année. Nous supposons également que la chronique ne contient ni observations manquantes, ni valeurs aberrantes ou accidentelles sur toute la période d'observation. Si tel est le cas, une correction des données est réalisée en utilisant la méthode de l'extrapolation linéaire, la prévision de la (ou des) valeur(s) en cause ou encore l'intuition du modélisateur. La valeur courante en  $t$  de la chronique est notée  $x_t$ , où  $t$  le temps est compris entre 1 et  $n$  avec  $n$  le nombre total d'observations de la chronique. On appelle  $h$  le nombre de points ou de valeurs à prévoir de la chronique. La prévision de la série temporelle – de  $(n + 1)$  à  $(n + h)$  connaissant l'historique de  $x_1$  à  $x_n$  – porte le nom d'horizon de la prévision.

Il est toujours utile, en première analyse, de représenter l'évolution temporelle d'un phénomène à l'aide d'un graphique ayant en ordonnée la valeur du phénomène économique  $x_t$  et en abscisse le temps  $t$ . Comme le temps est discret, le graphique obtenu est un diagramme en bâtons. Par tradition, on retient le polygone des fréquences de la représentation nommé : profil temporel de la chronique.

Les techniques traditionnelles de traitement des chroniques procèdent par décomposition puis reconstitution de la chronique pour effectuer la prévision. Cette approche suppose que la structure de la chronique peut être décomposée en éléments simples (modélisables), et donc plus facilement prévisibles, pour ensuite être reconstituée pour donner la prévision de la chronique.

Les premières études sur les chroniques ont amené à considérer de façon standard quatre grandes composantes :

- la tendance ou « *trend* » notée  $T_t$ , censée décrire le mouvement de long terme, de fond ou encore structurel du phénomène. Ce mouvement est traditionnellement représenté par des formes analytiques simples : polynomiales, logarithmiques, exponentielles, cycliques, logistiques. C'est ainsi qu'en économie la tendance contient des cycles longs de Kondratieff (cycle aperiodique de 40 à 60 ans), de Kuznets (20 ans), des cycles de Juglar (cycle de crise de 10 ans)... ;
- la composante cyclique notée  $C_t$ . En conjoncture, elle est représentée par le cycle de Kitchin d'une période de 3 à 5 ans. Dans la plupart des travaux sur les séries temporelles, la tendance et le cycle sont regroupés en une seule composante appelée l'extra-saisonnier  $E_t$  ;
- la composante saisonnière notée  $S_t$  : composante cyclique relativement régulière de période intra-annuelle et qui correspond souvent à des phénomènes de mode, de coutume, de climat... ;
- la composante résiduelle notée  $R_t$ . Elle rassemble tout ce que les autres composantes n'ont pu expliquer du phénomène observé. Elle contient donc de nombreuses fluctuations, en particulier accidentelles, dont le caractère est exceptionnel et imprévisible (catastrophes naturelles, grèves, guerres...). Comme par hypothèse ce type d'événement est censé être corrigé, le résidu présente – en général – une allure aléatoire plus ou moins stable autour de sa moyenne.

Remarquons que ces différentes composantes s'entendent pour des séries économiques, le plus souvent, mensuelles ou trimestrielles liées à la conjoncture. Dans le domaine de l'entreprise, les composantes sont conservées mais les périodicités sont parfois différentes (hebdomadaire par exemple).

La technique de décomposition-reconstitution repose, bien évidemment, sur un modèle qui l'autorise. Ce modèle porte le nom de schéma de décomposition. Il en existe essentiellement trois grands types :

- le schéma additif qui suppose l'orthogonalité (indépendance) des différentes composantes. Il s'écrit :  $x_t = E_t + S_t + R_t$ . Dans ce schéma, la saisonnalité est rigide en amplitude et en période ;
- le schéma multiplicatif :  $x_t = E_t \times S_t + R_t$ , dans lequel la composante saisonnière est liée à l'extra-saisonnier (saisonnalité souple avec variation de l'amplitude au cours du temps) ;
- le schéma multiplicatif complet :  $x_t = E_t \times S_t \times R_t$  (interaction générale des trois composantes). Il est actuellement le plus utilisé en économie. Il est commode puisque le logarithme de la chronique conduit au schéma additif.

En définitive, dans ces méthodes traditionnelles, deux questions sont importantes : l'existence d'une saisonnalité et le type de schéma à retenir ; elles constituent le chapitre 1 de cette partie. Nous examinons par la suite (chapitre 2) les techniques de prévision.

# Analyse de la saisonnalité

## Introduction

L'étude de la saisonnalité est un préalable au traitement d'une série chronologique. En effet, lorsque cette composante existe, il convient de l'isoler afin de pouvoir analyser les autres caractéristiques.

Une désaisonnalisation systématique, sans tester l'existence de cette composante, peut créer un « bruit » parasite nuisible à l'analyse de la chronique et donc dégrader la qualité de la prévision. Par conséquent, dans ce chapitre, nous allons en 1 présenter les techniques permettant de tester l'existence d'une composante saisonnière, puis nous examinons en 2 et 3 les schémas de décomposition et les méthodes de désaisonnalisation.

## Objectifs

**Détecter** une saisonnalité

**Calculer et interpréter** une fonction d'autocorrélation

**Distinguer** un schéma additif et multiplicatif

**Connaître** les méthodes de désaisonnalisation

## Concepts clés

Le tableau de Buys-Ballot

L'analyse de la variance (test de Fisher)

Le principe de la conservation des aires

La correction des variations saisonnières

La moyenne mobile

## 1 Détection de la saisonnalité

### 1.1 Représentation graphique et tableau de Buys-Ballot

L'analyse graphique d'une chronique suffit, parfois, pour mettre en évidence une saisonnalité. Néanmoins, si cet examen n'est pas révélateur ou en cas de doute, le tableau de Buys-Ballot permet d'analyser plus finement l'historique. La figure 1.1 des ventes trimestrielles d'un produit festif indique une saisonnalité marquée au quatrième trimestre, ce que nous pouvons confirmer à l'aide du tableau de Buys-Ballot.

Le tableau de Buys-Ballot est un tableau complet à deux entrées dans lequel sont consignées les valeurs de  $x_t$ . Il est constitué (cf. tableau 1.1) en ligne par les années et en colonne par le facteur à analyser (mois, trimestre...). Les moyennes et les écarts types<sup>1</sup>

1. La formule de l'écart type utilisée est celle de la population.

des années et des trimestres (ou des mois selon le cas) sont calculés ainsi que pour l'ensemble des observations de la chronique.

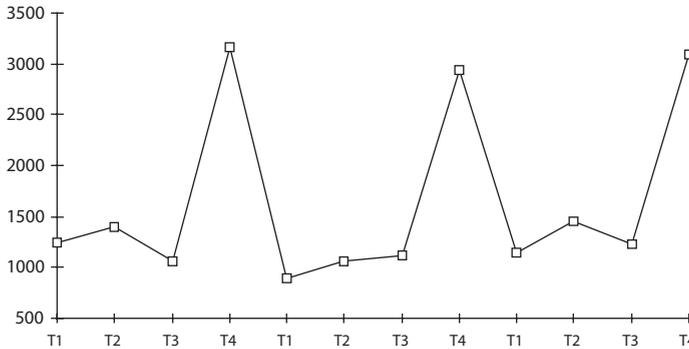


Figure 1.1 – Ventes trimestrielles en milliers d'unités

Tableau 1.1 – Exemple de constitution d'un tableau de Buys-Ballot pour des ventes trimestrielles (calculs arrondis)

Dates	T1	T2	T3	T4	Moyenne	Écart type
Année 1	1248	1392	1057	3159	1714	842,69
Année 2	891	1065	1118	2934	1502	831,02
Année 3	1138	1456	1224	3090	1727	795,48
Moyenne	1092	1304	1133	3061	Moyenne générale	Écart type général
Écart type	149	171	69	94	1647,7	829,74

Nous pouvons alors classer les trimestres pour chaque année par valeurs décroissantes (cf. tableau 1.2).

Tableau 1.2 – Classement des trimestres en fonction de leur valeurs

Années				
Année 1	T4	T2	T1	T3
Année 2	T4	T3	T2	T1
Année 3	T4	T2	T3	T1

La lecture du Tableau 1.2 indique la persistance du trimestre T4 à se classer en première position quelles que soient l'année et la position de « creux » occupée par le trimestre T1, ce qui nous conduit à retenir l'existence d'une saisonnalité rigide. Cette technique très simple permet la détection de la saisonnalité et aussi d'en préciser la nature.

## 1.2 Analyse de la variance et test de Fisher

L'examen visuel du graphique ou du tableau ne permet pas toujours de déterminer avec certitude l'existence d'une saisonnalité, de surcroît il interdit l'automatisme de traitement qui peut s'avérer nécessaire dans le cas d'un nombre important de séries à examiner. Le test de Fisher à partir de l'analyse de la variance permet de pallier ces deux inconvénients.

Ce test<sup>1</sup> suppose la chronique sans tendance ou encore sans extra-saisonnalité. Dans le cas contraire cette composante est éliminée par une régression sur le temps (extra-saisonnalité déterministe), ou par une procédure de filtrage (extra-saisonnalité aléatoire).

Soit :

$N$  le nombre d'années,

$p$  le nombre d'observations (la périodicité) dans l'année (trimestre  $p = 4$ , mois  $p = 12$ , etc.).

$x_{ij}$  la valeur de la chronique pour la  $i^{\text{ème}}$  année ( $i = 1 \dots, N$ ) et la  $j^{\text{ème}}$  période ( $j = 1 \dots, p$ ) supposée telle que  $x_{ij} = m_{ij} + e_{ij}$  ; les  $e_{ij}$  sont les résidus considérés comme aléatoires formés d'éléments indépendants :  $e_{ij} \rightarrow N(0 ; \sigma^2)$ .

Les  $m_{ij}$  sont les éléments d'une composante de la chronique qui s'écrivent :  $m_{ij} = a_i + b_j$  avec  $b_j$  qui mesure l'effet période en colonne du tableau et  $a_i$  qui mesure l'effet année en ligne du tableau.

Deux effets absents sont testés contre deux effets significativement présents :

- si l'effet période (ici trimestre) est significatif, la série est saisonnière ;
- si l'effet année est significatif, ceci suggère deux interprétations.
  - La chronique de départ n'a pas été transformée, elle possède alors des paliers horizontaux.
  - La chronique a été transformée, des changements de tendance existent dans la chronique.

Le déroulement du test est le suivant :

### 1) Calcul de la variance totale du tableau

Soit  $S_T$  la somme totale des carrés :

$$S_T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P (x_{ij} - x_{..})^2 \text{ avec}$$

$$x_{..} = \frac{1}{N \times p} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P x_{ij} : \text{moyenne générale de la chronique sur les } N \times p \text{ observations.}$$

1. LALOIRE J-C., 1972.

$$x_{i.} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_{ij} : \text{moyenne de l'année } i$$

$$x_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij} : \text{moyenne de la période } j$$

Comme  $x_{ij} = m_{ij} + e_{ij}$  avec  $e_{ij} \rightarrow N(0; \sigma^2)$  et  $m_{ij} = \text{effet période} + \text{effet année}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{..})^2 \\ &= \sum_i \sum_j [(x_{i.} - x_{..}) + (x_{.j} - x_{..}) + (x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..})]^2 \\ &= \sum_i \sum_j (x_{i.} - x_{..})^2 + \sum_i \sum_j (x_{.j} - x_{..})^2 + \sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..})^2 \\ &\quad + (\text{terme rectangle nul}) \\ &= p \sum_i (x_{i.} - x_{..})^2 + N \sum_j (x_{.j} - x_{..})^2 + \sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..})^2 \\ S_T &= S_A + S_p + S_R \\ &\quad (\text{année}) \quad (\text{période}) \quad (\text{résidus}) \end{aligned}$$

Le tableau 1.3 présente les calculs intermédiaires avec les notations précédentes.

**Tableau 1.3** – Calculs des moyennes par année et période

Périodes \ Années						Moyennes années
	1	...	J	...	p	
1	$x_{11}$		$x_{1j}$		$x_{1p}$	
...						
i	$x_{i1}$		$x_{ij}$		$x_{ip}$	$x_{i.} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_{ij}$
...						
N	$x_{N1}$		$x_{Nj}$		$x_{Np}$	
Moyennes périodes			$x_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij}$			$x_{..} = \frac{1}{Np} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^N x_{ij}$

Nous utilisons ces résultats pour effectuer l'analyse de la variance de la série (tableau 1.4).

**Tableau 1.4** – Analyse de la variance pour détecter une saisonnalité et/ou une tendance

Somme des carrés	Degré de liberté	Désignation	Variance
$S_p = N \sum_j (x_{.j} - x_{..})^2$	$p - 1$	Variance Période	$V_p = \frac{S_p}{p - 1}$
$S_A = p \sum_i (x_{i.} - x_{..})^2$	$N - 1$	Variance Année	$V_A = \frac{S_A}{N - 1}$
$S_R = \sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..})^2$	$(p - 1) \times (N - 1)$	Variance Résidu	$V_R = \frac{S_R}{(p - 1)(N - 1)}$
$S_T$	$N \times p - 1$	Variance Totale	$V_T = \frac{S_T}{N \times p - 1}$

À partir de ce tableau 1.4, nous pouvons construire les tests d'hypothèses.

**2) Test de l'influence du facteur colonne, la période**  
(mois ou trimestre :  $H_0$  = pas d'influence)

Calcul du Fisher empirique  $F_c = \frac{V_p}{V_R}$  que l'on compare au Fisher lu dans la table  $F_{v_1;v_2}^\alpha$

à  $v_1 = p - 1$  et  $v_2 = (N - 1)(p - 1)$  degrés de liberté.

Si le Fisher empirique est supérieur au Fisher lu dans la table, on rejette l'hypothèse  $H_0$ , la série est donc saisonnière.

**3) Test de l'influence du facteur ligne, la tendance**  
( $H_0$  = pas d'influence du facteur année)

Calcul du Fisher empirique  $F_c = \frac{V_A}{V_R}$  que l'on compare au Fisher lu dans la table  $F_{v_3;v_2}^\alpha$

à  $v_3 = N - 1$  et  $v_2 = (N - 1)(p - 1)$  degrés de liberté.

Si le Fisher empirique est supérieur au Fisher lu, on rejette l'hypothèse  $H_0$ , la série est donc affectée d'une tendance.

**EXERCICE D'APPLICATION 1.1**



**Fichier C1EX1**

**Test de détection de la saisonnalité à partir des données du tableau 1.1**

Effectuez le test de détection de saisonnalité et de tendance à partir des données du tableau 1.1.





**Solution**

Nous trouvons les résultats suivants ( $p = 4, N = 3$ ) :

$$x_{..} = 1\,647,67 ;$$

$$x_{1.} = 1\,714 ; x_{2.} = 1\,502 ; x_{3.} = 1\,727$$

$$x_{.1} = 1\,092,33 ; x_{.2} = 1\,304,33 ; x_{.3} = 1\,133 ; x_{.4} = 3\,061$$

$$S_p = 8\,066\,015,31 ; S_A = 127\,650,68 ; S_R = 68\,026,67 ;$$

$$S_T = S_A + S_p + S_R = 8\,261\,692,66$$

**a)** Test de saisonnalité :  $F_c = \frac{S_p/3}{S_R/6} = 237,14$  que l'on compare à  $F_{3;6}^{0,05} = 4,76$ . La série est donc saisonnière.

**b)** Test de tendance :  $F_c = \frac{S_A/2}{S_R/6} = 5,63$  que l'on compare à  $F_{2;6}^{0,05} = 5,14$ , l'hypothèse  $H_0$  est rejetée ; la chronique est affectée d'une tendance (à la limite de la significativité pour un seuil de 5 %). Dans ce cas il convient de refaire le test après élimination de la tendance, soit par régression sur le temps soit par un passage aux différences premières (cf. chapitre 5).

### 1.3 Fonction d'autocorrélation

On appelle coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 le coefficient de corrélation linéaire simple calculé entre la série chronologique et cette même série décalée d'une période de temps. Les coefficients d'autocorrélation sont calculés pour des ordres allant de 0 à  $K$ ,  $K$  étant le décalage maximum admissible. On choisit en général  $\frac{n}{6} \leq K \leq \frac{n}{3}$  mais aussi  $K$  égal à 2 ou 3 fois la période de la saisonnalité,  $K = \frac{n}{5}$  si  $n \geq 150$  ou encore comme certains auteurs le suggèrent  $K = \sqrt{n}$ .

**Tableau 1.5** – Exemple de calcul d'une corrélation

		Retards	Autocorrélation
1 2 3 ...	t ... n	0	$r_0 = 1$
1 2 3 ...	t - 1 ... n - 1	1	$r_1$
1 2 3 ...	t - 2 ... n - 2	2	$r_2$
	...	...	...
	t - k ... n - k	k	$r_k$
	...	...	...
	t - K ... n - K	K	$r_K$

La représentation graphique de la fonction d'autocorrélation (notée FAC) est appelée corrélogramme.

Le coefficient d'autocorrélation d'ordre  $k$  est donné par :

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_1)(x_{t-k} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_1)^2 \sum_{t=k+1}^n (x_{t-k} - \bar{x}_2)^2}}$$

$$= \frac{\sum_{t=k+1}^n x_t x_{t-k} - (n-k)\bar{x}_1 \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\sum_{t=k+1}^n x_t^2 - (n-k)\bar{x}_1^2\right)\left(\sum_{t=k+1}^n x_{t-k}^2 - (n-k)\bar{x}_2^2\right)}}$$

avec  $\bar{x}_1 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n x_t$   $\bar{x}_2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n x_{t-k}$

Le test de signification sur le coefficient  $r_k$  permet de sélectionner les coefficients d'autocorrélation significativement différents de 0 ; il peut, si  $n$  est suffisamment grand, s'effectuer comme pour un coefficient de corrélation linéaire simple. Soit  $\rho_k$  la valeur vraie de  $r_k$  et l'hypothèse  $H_0 : \rho_k = 0$  contre l'hypothèse alternative  $H_1 : \rho_k \neq 0$ .

Sous l'hypothèse  $H_0$  la quantité  $t_c = \frac{|r_k|}{\sqrt{1-r_k^2}} \sqrt{n-2}$  obéit à une loi de Student à  $n-2$  degrés de liberté (ou a une loi normale centrée réduite si  $n > 30$ ) dans lequel  $n$  est le nombre d'observations servant à calculer le coefficient d'autocorrélation. Si  $t_c > t_{n-2}^{1-\alpha/2}$ , l'hypothèse  $H_0$  est rejetée ( $t_{n-2}^{1-\alpha/2}$  valeur de la loi de Student au seuil  $\alpha$  à  $n-2$  degrés de liberté).

Pour  $n$  grand, si la série est sans tendance et de variance relativement constante au cours du temps, (cf. chapitre 6) nous pouvons poser  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$  ( $\bar{x}$  = moyenne de la série chronologique),  $\text{Var}(x_t) = \text{Var}(x_{t-k})$  et nous pouvons écrire la formule simplifiée suivante :

$$r_k = \frac{R_k}{R_0} \text{ avec } R_k = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x}) \text{ et } R_0 = \text{Var}(x_t)$$

La représentation graphique de la fonction d'autocorrélation (notée FAC) est appelée corrélogramme comme l'illustre la figure 1.2.

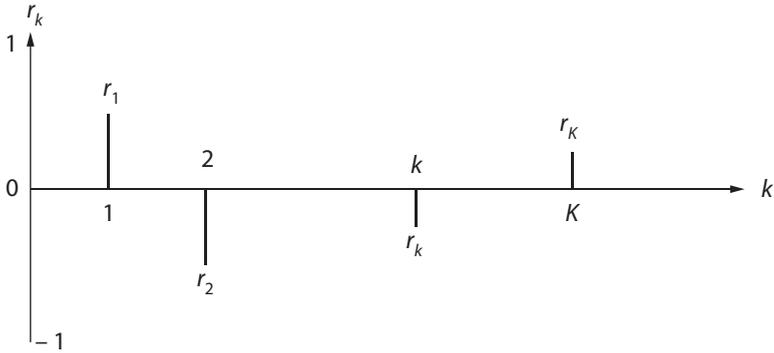


Figure 1.2 – Exemple de corrélogramme

Les graphiques suivants indiquent l'allure « attendue » de la fonction d'autocorrélation dans des cas simples. Ils permettent de vérifier que la FAC joue bien le rôle de décomposition temporelle de la chronique. Soit les quatre processus  $x_{1t}$ ,  $x_{2t}$ ,  $x_{3t}$ , et  $x_{4t}$  générés artificiellement sur 36 observations et dont les représentations sont présentées figure 1.3.

$$x_{1t} = R_t \quad (R_t = \text{variable aléatoire gaussienne})$$

$$x_{2t} = a_1 t + a_0 + R_t \quad (t = \text{tendance } t = 1 \dots n)$$

$$x_{3t} = S_t + R_t \quad (S_t = \text{saisonnalité pure de quatre périodes})$$

$$x_{4t} = a_1 t + a_0 + S_t + R_t$$

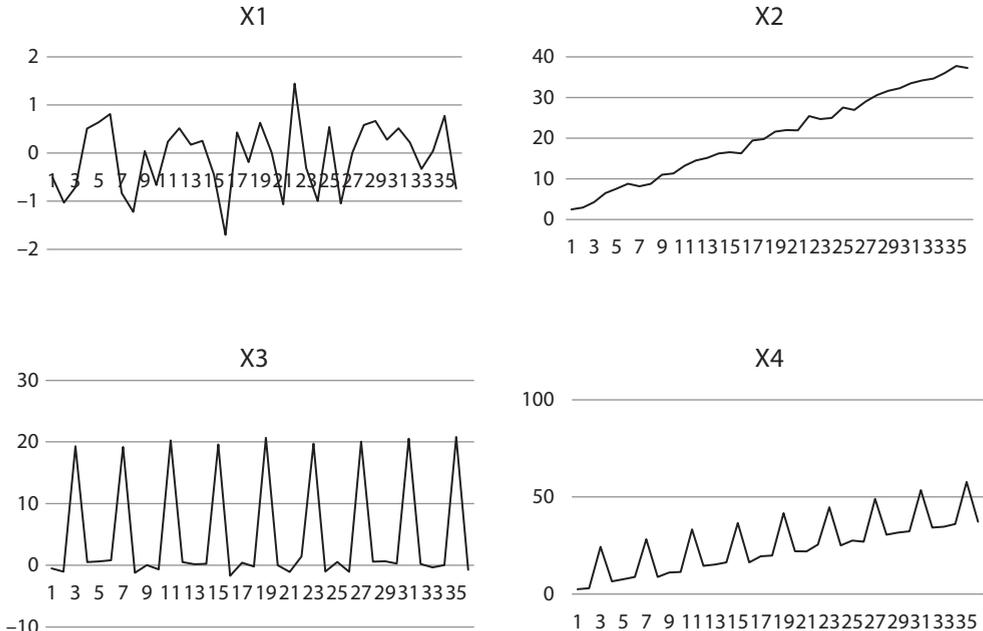


Figure 1.3 – Représentation des processus analysés

Les corrélogrammes respectifs de chacun des processus sont présentés sur la figure 1.4.

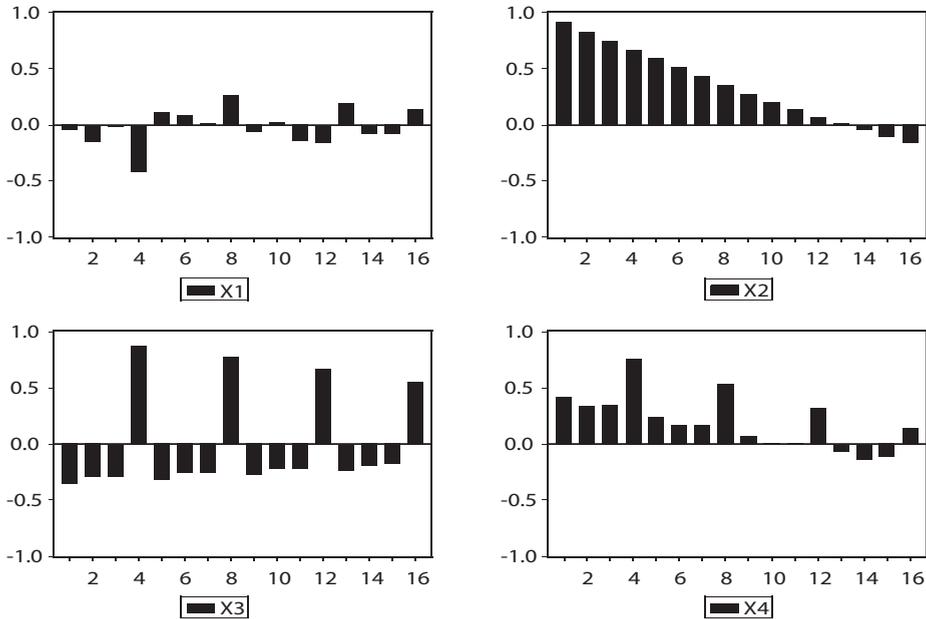


Figure 1.4 – Corrélogrammes des quatre processus

Les termes du corrélogramme de  $x_{1t}$  sont tous faibles à l'exception (fortuite) d'un seul, ceci est caractéristique d'une variable aléatoire de type « bruit blanc<sup>1</sup> ». Le corrélogramme de  $x_{2t}$  avec une décroissance lente de ses termes est spécifique d'une série affectée d'une tendance. Les termes très élevés (4, 8, 12 et 16) du corrélogramme de  $x_{3t}$  révèlent la saisonnalité de quatre périodes. Enfin, le corrélogramme de  $x_{4t}$  est une combinaison des trois précédents.

### EXERCICE D'APPLICATION 1.2



Fichier C1EX1

#### Calcul d'une fonction d'autocorrélation

À partir des données relatives aux ventes du tableau 1.1, calculez la FAC et testez la significativité des coefficients d'autocorrélation par rapport à 0.

#### Solution

Nous allons détailler sur le tableau 1.6 les calculs pour un coefficient, par exemple  $r_2$ , c'est-à-dire la corrélation entre  $x_t$  et  $x_{t-2}$ . ▶

1. Nous examinons en détail au chapitre 3 les caractéristiques d'un bruit blanc, succession de variables aléatoires homosédastiques et non corrélées.

► **Tableau 1.6** – Exemple de calcul pour un coefficient d'autocorrélation d'ordre 2

t	$x_t$	$x_{t-2}$	$(x_t - \bar{x}_1)(x_{t-2} - \bar{x}_2)$	$(x_t - \bar{x}_1)^2$	$(x_{t-2} - \bar{x}_2)^2$
1	1 057	1 248	195 360,56	431 162,99	88 518,15
2	3 159	1 392	- 222 259,17	209 0540,47	23 629,84
3	891	1057	402 349,24	676 391,15	239 336,23
4	1 065	3 159	- 1 045 292,60	419 813,28	2 602 672,82
5	1 118	891	390 149,56	354 775,05	429 051,24
6	2 934	1 065	- 586 700,47	1 490 767,59	230 899,47
7	1 138	1 118	246 239,35	330 659,57	183 372,34
8	1 456	2 934	- 357 132,95	66 167,26	1 927 598,84
9	1 224	1 138	199 297,67	239 052,53	166 154,12
10	3 090	1 456	- 123 679,42	1 896 046,27	8 067,63
Somme	17 132	1 5458	- 901 668,23	7 995 376,17	5 899 300,68

$\bar{x}_1 = 1 713,2$  et  $\bar{x}_2 = 1 545,8$

$$r_2 = \frac{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_1)(x_{t-2} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_1)^2 \sum_{t=k+1}^n (x_{t-2} - \bar{x}_2)^2}} = \frac{-901 668,23}{\sqrt{7 995 376,17} \sqrt{5 899 300,68}} = -0,13$$

Le  $t$  empirique est égal pour  $n = 10$  et  $r_k = -0,13$  :  $t_c = \frac{|r_k|}{\sqrt{1 - r_k^2}} \sqrt{n - 2} = 0,38$ .

Le coefficient n'est pas significativement différent de 0.

Le tableau 1.7 indique l'ensemble des valeurs de la fonction d'autocorrélation que l'on compare à la valeur lue dans la table de Student pour un seuil de 5 % et à  $n - 2$  degrés de liberté. Seul le coefficient d'autocorrélation d'ordre 4 est significativement différent de 0 ; la périodicité des données étant trimestrielle, ce « pic » est donc attribué à la saisonnalité des données.

**Tableau 1.7** – Calcul d'une fonction d'autocorrélation

Retards	$r_k$	n	$ t_c $	d d l	t lu à 0,95
0	1	12	-	-	-
1	- 0,395	11	1,29	9	2,262
2	- 0,132	10	0,38	8	2,306
3	- 0,33	9	0,95	7	2,365
4	0,952	8	<b>7,62</b>	6	2,447

## 1.4 Spectre

En première analyse le spectre d'une chronique peut s'interpréter comme étant la décomposition de sa variance dans le domaine des fréquences. Le spectre est un graphique présentant en abscisse les fréquences d'apparition des cyclicités, ces fréquences s'exprimant :

- en radians pour la pulsation  $\omega$  ;
- en hertz pour la fréquence  $\lambda$  ;
- en unité de temps pour la période  $T$ ,

en ordonnée sont portées les valeurs du spectre qui peuvent être assimilées aux différentes variances des cyclicités de la fréquence  $\omega$ ,  $T$  ou  $\lambda$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\lambda$$

À partir de ce graphe, nous pouvons mettre en évidence, dans la structure de la chronique, une cyclicité ( $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ) de fréquence  $\omega_0$ , d'amplitude  $A$  et de phase  $\varphi$ , si la valeur spectrale en  $\omega_0$  est élevée.

Nous verrons ultérieurement (chapitre 4) une définition plus rigoureuse de cet instrument ainsi que des simulations donnant la forme « attendue » du spectre.

## 2 Sélection du schéma

La saisonnalité d'une chronique peut parfois être influencée par l'extra-saisonnier et/ou le résidu. C'est de l'existence de ces interactions que sont nés les schémas de décomposition des séries chronologiques : additif, multiplicatif et multiplicatif complet. Nous présentons deux techniques simples pour sélectionner le schéma.

### 2.1 Procédure de la bande

La procédure de la bande consiste à partir de l'examen visuel du graphique de l'évolution de la série brute à relier, par une ligne brisée, toutes les valeurs « hautes » et toutes les valeurs « basses » de la chronique. Si les deux lignes sont parallèles, la décomposition de la chronique peut se faire selon un schéma additif ; dans le cas contraire, le schéma multiplicatif semble plus adapté. L'examen visuel du graphique des données du tableau 1.1 révèle un schéma de type additif. Les figures 1.5 et 1.6 illustrent une interprétation de cette procédure.

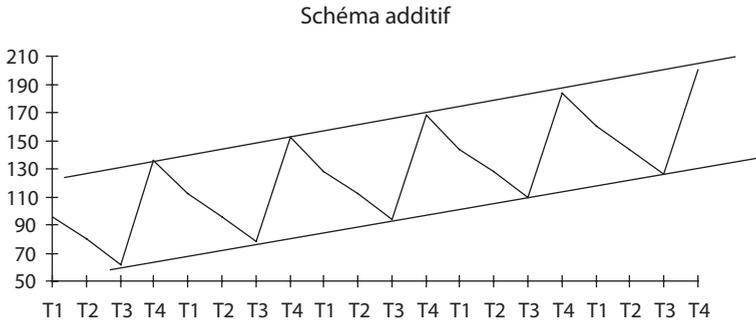


Figure 1.5 – Exemple de schéma additif

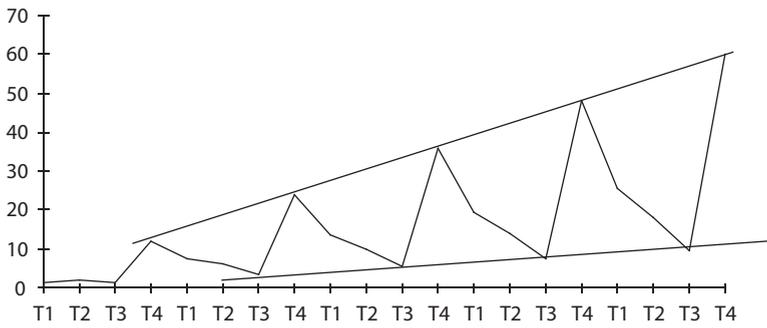


Figure 1.6 – Exemple de schéma multiplicatif

## 2.2 Test de Buys-Ballot

Le test de Buys-Ballot est fondé sur les résultats du tableau 1.1 (calcul des moyennes et des écarts types par année). Le schéma est, par définition, additif si l'écart type et la moyenne sont indépendants ; il est multiplicatif dans le cas contraire. Lorsque le nombre d'années est suffisant, nous pouvons estimer par la méthode des MCO les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  de l'équation  $\sigma_i = a_1 \bar{x}_i + a_0 + \varepsilon_i$  après avoir vérifié sur le graphique de régression  $(\sigma_i, \bar{x}_i)$  que le nuage peut être représenté par ce type de modèle. Dans le cas, où le coefficient  $a_1$  n'est pas significativement différent de 0 (test de Student) alors on accepte l'hypothèse d'un schéma additif ; dans le cas contraire, nous retenons un schéma multiplicatif.

Bien qu'ici le nombre d'années (= 3) du tableau 1.1 (Fichier CIEX1) soit très faible, nous procédons, à titre d'exemple, à l'estimation du modèle :

$$\sigma_i = -0,065\bar{x}_i + 929,57 + e_i$$

(-0,35)

$$R^2 = 0,12$$

$$n = 3$$

(.) =  $t$  de Student.