Andrei Iordan
Vincent Michel

Analyse Complexe

Fonctions holomorphes d'une variable

DUNOD

www.dunod.com
ISBN 978-2-10-081927-0

Table des matières

Ce livre est dédié à notre collègue et ami, Gennadi Henkin.

Introduction

La théorie des nombres complexes fut ébauchée au XVI^e siècle par Bombelli pour écrire les racines d'un polynôme à coefficients réels de degré trois puis développée pour étudier celles des polynômes à coefficients réels de degré arbitraire. Ces nombres, qualifiés d'imaginaires, non seulement se sont avérés être des outils remarquablement efficaces pour mener à bien des résolutions d'équations réelles mais également des clés pour mieux comprendre certains phénomènes de l'analyse réelle.

Un exemple instructif est celui de la fonction $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \left(1+x^2\right)^{-1}$. Il est possible de prouver en restant dans le cadre de l'analyse réelle, x_0 étant fixé dans $\mathbb{R}$ et $I\left(x_0\right)$ étant l'intervalle centré en x_0 et de rayon $\sqrt{1+x_0^2}$, qu'il existe $\left(c_n\left(x_0\right)\right) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in I\left(x_0\right)$, $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^n$. L'analyse complexe permet de comprendre que f n'est pas la somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$ car elle est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction rationnelle F dont l'ensemble des pôles est $\{-i, i\}$ et car le rayon de convergence de la série de Taylor de f en x_0 ne peut excéder la distance à un pôle de F, en l'occurrence $\left|x_0 \pm i\right|$ c'est-à-dire $\sqrt{1+x_0^2}$.

Cet exemple simple illustre parfaitement l'un des théorèmes importants de la théorie qui est qu'une fonction holomorphe sur un ouvert U, c'est-à-dire une fonction f de U dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $a \in U$, $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $z \in U\setminus\{a\}$ tend vers a, est sur tout disque ouvert de centre un point a de U et de rayon la distance de a à $\mathbb{C}\setminus U$, la somme de sa série de Taylor en a.

Pour fondamental qu'il soit, le résultat évoqué précédemment n'est qu'une conséquence de la formule intégrale de Cauchy. Celle-ci, clé de voûte de toute la théorie, met en évidence que si f est holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{D(a,r)}$, les valeurs prises par f dans $D(a,r)$ sont déterminées par celles sur le cercle $C(a,r)$:

$$\forall z \in D(a,r),\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)^+} \frac{f(w)}{w-z}dw \tag{1}$$

où l'intégrale est celle obtenue en effectuant formellement les substitutions $w = a+re^{i\theta}$, $dw = rie^{i\theta}d\theta$ et en intégrant le résultat sur $[0, 2\pi]$.

Pour ce livre, nous avons eu l'ambition de guider le lecteur depuis des résultats relativement élémentaires comme la définition de l'exponentielle complexe vers la théorie de Cauchy et des singularités isolées avant de lui faire admirer certains des théorèmes les plus marquants de la théorie. Citons pêle-mêle, le théorème de Riemann sur la représentation conforme, le théorème de Runge, le grand théorème de Picard, le théorème de Liouville sur les fonctions elliptiques. La liste ne peut pas être exhaustive mais citons encore le théorème de Hölder sur la transcendance différentielle de la fonction Gamma.

La théorie des fonctions holomorphes met en œuvre beaucoup de notions de topologie et de géométrie différentielle. Afin de limiter les prérequis à la lecture de ce livre, il nous a paru souhaitable d'en rassembler autant que possible en annexe. Les preuves de certains résultats, intuitivement évidents comme par exemple le théorème de Jordan spécifiant qu'une courbe simple et régulière sépare le plan en deux ouverts connexes disjoints, demandent des efforts conséquents.

Hormis des sections traitant de la sphère de Riemann ou des homographies, les cinq premiers chapitres de ce livre sont consacrés à la preuve de la formule intégrale de Cauchy (1) et à ses conséquences les plus fondamentales. Ils correspondent à un cours de troisième année de licence. Les quelques sections ou énoncés qui dépassent ce cadre sont signalés par une étoile. Le reste de l'ouvrage s'adresse à des étudiants en première ou deuxième année de master, futurs docteurs ou agrégés selon les sujets abordés. Ces derniers pourront notamment y trouver des développements originaux pour l'oral du concours de l'agrégation.

Les énoncés et les preuves de ce livre sont pour la plupart des choses bien connues pour lesquels nombre de mathématiciens ont écrit d'excellents ouvrages. Il est impossible de citer tous les livres que nous avons consultés pour la rédaction du nôtre et nous espérons que leurs auteurs ne nous en tiendrons pas rigueur. Nous tenons cependant à mentionner quelques ouvrages classiques comme par exemple celui de H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* ou celui de W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, ouvrages qui exposent dans un style agréable et concis les bases ainsi que quelques-uns des théorèmes importants de la théorie. Citons aussi deux livres en langue anglaise : *Complex Analysis* de L. Ahlfors et *Classical Topics in Complex Function Theory* de R. Remmert, qui en abordant des sujets très profonds de la théorie permettent de mieux en appréhender la beauté.

Notre ouvrage débute par des rappels sur $\mathbb{C}$. Deux constructions de $\mathbb{C}$ sont proposées en annexe. L'une consiste à munir $\mathbb{R}^2$ d'une multiplication appropriée. L'autre permet de voir $\mathbb{C}$ comme un corps de rupture du polynôme $X^2 + 1$ et s'adresse aux étudiants de master. Les deux dernières sections du chapitre 1 peuvent être réservées à une seconde lecture. Bien que la sphère de Riemann est un objet fondamental de l'analyse complexe, nous nous limitons à ce qui est suffisant pour mieux comprendre certains résultats sur les fonctions méromorphes ou sur les familles normales. Le section dévolue aux homographies est essentiellement géométrique. Les automorphismes de $\mathbb{C}$ et du disque unité $\mathbb{D}$ étant des cas particuliers d'homographies, l'étude de ces dernières est indispensable aux étudiants en master. Le sujet, bien qu'élémentaire, est pertinent pour résoudre nombre de jolis problèmes de géométrie classique dans le plan.

L'objet du deuxième chapitre est de définir ce qu'est une fonction holomorphe, d'en énoncer les premières propriétés puis d'en donner les exemples fondamentaux. Selon qu'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est envisagée comme une fonction de deux variables réelles ou d'une seule variable complexe, la définition de son holomorphie peut être vue comme une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction de la variable réelle ou comme une particularisation de la différentiabilité. Dans le premier cas, on s'intéresse aux taux d'accroissements de f et dans le second, on envisage que les termes

$\mathbb{R}$-linéaires des développements limités de f sont $\mathbb{C}$-linéaires. Ce deuxième point de vue admet une variante importante : l'holomorphie de f peut être aussi définie comme le fait que f est $\mathbb{R}$-différentiable et vérifie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ où $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann. Cette façon de voir est bien plus qu'une reformulation car elle invite la théorie des distributions et des EDP. Cet aspect n'est cependant pas développé dans ce livre. Mentionnons enfin un troisième point de vue, purement géométrique, qui est de demander que f conserve les angles. Il est important mais ne donne naissance qu'aux fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas.

Le chapitre détaille ensuite les exemples fondamentaux de fonctions holomorphes et notamment les fonctions qui sont somme d'une série entière. C'est ainsi que sont définies les fonctions exponentielles et trigonométriques complexes. Cette présentation permet de définir $\frac{\pi}{2}$ comme le plus petit zéro de la fonction cosinus résidant dans $\mathbb{R}_+^*$.

Contrairement à l'exponentielle réelle qui est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'exponentielle complexe, exp, est fortement non injective puisque $2\pi i$-périodique. Cette périodicité fait qu'un nombre complexe admet une infinité de logarithmes et qu'en choisir un plutôt qu'un autre relève de l'arbitraire. La dernière section de ce chapitre étudie de façon systématique les déterminations continues ou holomorphes du logarithme. Il s'avère que les déterminations continues du logarithme sur un ouvert U sont holomorphes et qu'il est impossible d'en trouver une si U contient un cercle centré en 0. Parmi toutes ces déterminations, celle qui est définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et, à valeurs dans $\mathbb{R} + i\,]-\pi, \pi[$ est qualifiée de principale. Cette fonction fondamentale est étudiée en détail.

Le troisième chapitre commence l'étude des propriétés non élémentaires des fonctions holomorphes. Les deux premières sections mènent à la formule intégrale de Cauchy (1). Cette formule suffit à établir l'analyticité des fonctions holomorphes ainsi que, dans le chapitre 4, leurs propriétés les plus essentielles. Il est possible, voire même conseillé, de lire les deux dernières sections du chapitre 3 après le quatrième et avant le cinquième chapitre.

Les deux dernières sections du chapitre 3 concernent la théorie de l'indice d'un chemin et la théorie de Cauchy homotopique. De façon sommaire, deux lacets γ et δ d'un ouvert U sont homotopes dans U s'il est possible de déformer γ en δ continûment dans U. Lorsque des lacets sont homotopes dans U, la valeur de l'intégrale d'une fonction holomorphe sur U le long de ces lacets est la même. Ceci permet d'écrire une formule intégrale de Cauchy plus générale que (1) :

$$\forall z \in U\backslash\langle\gamma\rangle,\ \operatorname{Ind}(\gamma, z)\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \tag{2}$$

où l'indice $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ compte, de façon imagée, le nombre de tours que γ fait autour de z.

Le chapitre 4 expose les propriétés les plus fondamentales des fonctions holomorphes : théorèmes de Liouville, Morera et Riemann, principe des zéros isolés, principe du maximum, théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme des suites de fonctions holomorphes et théorème de l'application ouverte pour les fonctions holomorphes. Moins fondamental mais d'une grande portée pratique, ce chapitre présente aussi un résultat sur l'holomorphie des intégrales à paramètre. Là encore, se manifeste l'efficacité de la formule de Cauchy qui permet de supprimer les hypothèses classiques de domination des dérivées au profit d'une seule hypothèse de domination sur la fonction elle-même.

Le chapitre 5 complète la panoplie d'outils construits dans le chapitre 4 par deux sujets très importants pour les applications : la description des singularités isolées et le théorème des résidus. Ceci repose sur la théorie des séries de Laurent qui généralise la théorie des séries entières. Ces séries permettent de répartir les fonctions holomorphes sur un disque épointé en trois classes disjointes : celles qui se prolongent par continuité au centre du disque, celles qui y présentent un pôle et celles qui ne sont pas dans les deux classes précédentes. Cette classification constitue un outil extrêmement puissant dans l'étude des fonctions holomorphes à une variable.

Le théorème des résidus prouvé dans ce chapitre 5 permet de calculer nombre d'intégrales rencontrées dans d'autres domaines des mathématiques mais aussi en physique. Parce que dans ces situations concrètes, on intègre en général sur des lacets qui ne sont pas des cercles, la formule de Cauchy (2) est nécessaire pour écrire un théorème des résidus utile. L'indice qui apparaît dans (2) est très souvent 0 ou 1 car on choisit d'intégrer sur des chemins assez réguliers qui ne se recoupent pas, ne font pas plusieurs tours sur leur support et sont orientés dans le sens trigonométrique. Dans cette situation, le célèbre théorème de Jordan explique que le lacet découpe dans $\mathbb{C}$ deux parties ouvertes, l'une bornée où l'indice vaut 1 et l'autre où l'indice vaut 0. Nous proposons en annexe une preuve de ce résultat pour les lacets réguliers.

Il existe un moyen d'éviter d'avoir recours au théorème de Jordan ainsi qu'à sa longue et difficile preuve : la théorie des compacts à bord et celle de l'intégration des formes différentielles. Ceci s'adresse surtout aux étudiants en master car cela met en œuvre des concepts de géométrie différentielle. Les efforts qu'il faut déployer pour obtenir des théories consistantes sont récompensés dans le chapitre 7 par des formules de Cauchy et des résidus élégantes mais aussi par le fait que les concepts développés à cette occasion deviennent incontournables lorsque le nombre de variables augmente ou qu'on travaille avec les variétés différentiables.

Le chapitre 6 expose les principales propriétés des fonctions harmoniques, objets mathématiques naturels au sens où ils permettent de décrire nombre de phénomènes physiques concrets. Ce chapitre concerne les étudiants en master, agrégatifs ou non, mais il peut s'adresser aux étudiants de licence ayant bien assimilé les chapitres précédents.

Les fonctions harmoniques à valeurs réelles peuvent être vues aussi bien comme étant localement des parties réelles de fonctions holomorphes que comme des fonctions de classe C^2 de Laplacien nul ou encore comme des fonctions continues vérifiant la propriété de moyenne. Que ces trois points de vue sont équivalents n'a rien d'évident. L'un des arguments repose sur la solution du problème de Dirichlet pour le disque exposé dans ce chapitre.

Les deux premières sections du chapitre 7 concernent les séries de fonctions méromorphes et les produits infinis. Le début de la troisième section concerne la topologie naturelle de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert et le théorème de Montel. Ces sujets sont à la lisière du programme de l'agrégation de mathématiques et les étudiants préparant ce concours devraient en tirer profit.

La section consacrée aux formules intégrales avancées revisite les formules classiques de la théorie pour les adapter au formalisme des compacts à bord, c'est-à-dire des compacts qui localement et à difféomorphisme près, sont un disque, un disque intersecté avec un demi-plan ou un disque intersecté avec un quart de plan ; un polygone est, par exemple, un compact à bord. L'annexe E introduit la théorie de l'intégration sur les compacts à bord et leur bord. La formule clé dans ce contexte de géométrie différentielle est la formule de Green-Riemann. La preuve de cette formule qui est donnée en annexe est une bonne introduction à celle de la formule Stokes en dimension quelconque. La formule de Green-Riemann permet d'établir la très utile formule de Cauchy-Pompeiu :

$$\forall a \in \overset{\circ}{K},\ f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-a}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{K} \frac{1}{w-a}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(w)d\overline{w} \wedge dw$$

valable quand $f \in C^1(U)$ et que K est un compact à bord de U. Lorsque f est holomorphe, cette formule est une version de la formule intégrale de Cauchy et l'absence de la fonction indice peut la rendre plus efficace que (2). Mentionnons que la formule de Jensen établie dans cette section peut être aussi utile aux agrégatifs.

Les autres sections du chapitre 7 s'adressent plutôt aux étudiants en deuxième année de master. La section concernant les familles normales est ardue mais le lecteur qui surmonte leur aride technicité est récompensé par le magnifique résultat qu'est le grand théorème de Picard : une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ qui présente en 0 une singularité essentielle prend toutes les valeurs sauf éventuellement une et chaque valeur prise l'est une infinité de fois.

Bien que moins spectaculaire, le théorème de Bloch est aussi remarquable car il permet d'estimer de façon universelle la taille de l'image d'un domaine par une fonction holomorphe non constante.

Le chapitre 7 se termine par le théorème de monodromie. De façon imagée, un phénomène de monodromie se produit quand une quantité varie de façon continue le long d'un lacet et qu'il est impossible de faire coïncider la valeur de cette quantité à l'arrivée du lacet avec celle du point du départ alors même que points d'arrivée et de départ sont identiques. L'exemple typique est celui de l'impossibilité de fabriquer une détermination du logarithme qui soit continue sur le cercle unité. Le théorème de monodromie donne une condition nécessaire et suffisante pour que cette impossibilité n'ait pas lieu. Bien que relativement abstrait, ce théorème permet de donner une autre preuve du petit théorème de Picard à l'aide de la fonction modulaire construite dans le chapitre 10.

Le chapitre 8 est consacré à l'un des plus célèbres théorèmes de la théorie, celui de représentation conforme de Riemann : à biholomorphisme près, il n'existe pas d'autre domaine simplement connexes que $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$. Ce théorème peut être lu à profit par les étudiants en première année de master et par ceux de troisième année de licence ayant bien compris le théorème de Montel. Le théorème de Carathéodory concerne plus les étudiants en deuxième année de master. Il répond à la question naturelle qui est de savoir quand un biholomorphisme d'un domaine simplement connexe sur le disque unité se prolonge en homéomorphisme entre les adhérences de ces deux ensembles.

Le chapitre 9 est sans aucun doute l'un des plus difficiles du livre. Sa première section traite du problème d'approximation suivant : U et V étant deux ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $U \subset V$, l'espace des restrictions à U de fonctions holomorphes sur V est-il dense dans celui des fonctions holomorphes sur U pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ? De façon surprenante, la réponse à cette question est purement topologique : $V \backslash U$ ne doit pas avoir de composante connexe relativement compacte dans V. Les théorèmes de Runge ont de nombreuses applications en analyse complexe à une variable et la notion de paires de Runge qui en découle admet une généralisation féconde en plusieurs variables.

La seconde section du chapitre 9 est consacrée au théorème de Mergelyan qui étudie la question de la densité des polynômes holomorphes dans $C^0(K)$ quand K est un compact de $\mathbb{C}$. Un cas particulier de ce théorème établit que les fonctions continues sur un compact K d'intérieur vide et de complémentaire connexe peuvent être approximées uniformément sur K par des polynômes holomorphes.

Grâce au théorème de Runge, il est possible de résoudre sur un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$ l'équation de Cauchy-Riemann, non-homogène $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$ où l'inconnue f est une fonction différentiable et la donnée g est une fonction de classe C^k. Notant $\overline{\partial} : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$ l'opérateur de Cauchy-Riemann, cette équation s'écrit aussi $\overline{\partial} f = g d\overline{z}$. Sous cette forme, elle admet une généralisation naturelle à plusieurs variables qui est l'équation la plus importante de l'analyse complexe. La caractérisation des domaines de $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, où cette équation peut être résolue a été l'un des plus célèbres problèmes des années 1950.

La résolution de l'équation de Cauchy-Riemann ouvre la voie à une méthode très efficace pour construire des fonctions holomorphes ayant certaines propriétés prescrites : on commence par trouver une solution en termes de fonction différentiable ou même en termes de distribution puis en résolvant une équation de Cauchy-Riemann, on ajuste cette solution pour en obtenir une qui est holomorphe.

L'une des applications de cette méthode est la résolution du premier problème de Cousin. Ce résultat est utilisé dans le chapitre 10 pour démontrer le théorème de Mittag-Leffler de prescription des pôles d'une fonction méromorphe.

Le chapitre 10 répond à la question de savoir si on peut prescrire les zéros d'une fonction holomorphe ou les pôles d'une fonction méromorphe. Pour les fonctions holomorphes, une réponse positive est donnée par le théorème de factorisation de Weierstrass dont la preuve et l'énoncé s'appuient sur la théorie des produits infinis développées dans le chapitre 7, théorie qui doit être connue des agrégatifs. Le théorème de Mittag-Leffler permet quant à lui non seulement de répondre positivement à la question posée pour les fonctions méromorphes mais aussi de prescrire les parties principales de chaque pôle.

La troisième section du chapitre 10 est peut être la plus récréative de ce livre. On y étudie la divisibilité, les pgcd et les idéaux de l'anneau intègre $\mathcal{O}(D)$, D étant un domaine. Les énoncés de cette section permettent d'illustrer de façon un peu surprenante des notions importantes au programme de l'agrégation. Par exemple, toute famille de l'anneau $\mathcal{O}(D)$ admet un pgcd mais il n'est pas factoriel. Cette section illustre aussi une intrication étonnante entre la structure algébrique de $\mathcal{O}(D)$ et la structure analytique de D. En utilisant les notions de valuation et de caractère d'une algèbre, nous démontrons le théorème de Bers qui établit que deux domaines sont biholomorphes si et seulement si leurs algèbres de fonctions holomorphes sont isomorphes.

Les deux premières sections du chapitre 11 sont incontournables pour un étudiant en master car on y étudie les propriétés fondamentales de la fonction Γ d'Euler et de la fonction ζ de Riemann. La première apparaît dans toutes les sciences exactes et la seconde est au cœur d'une célèbre conjecture de Riemann. Comme illustration de l'importance de ζ, nous prouvons le théorème des nombres premiers : quand un réel x tend vers $+\infty$, le nombre d'entiers premiers plus petit que x est équivalent à $x/\ln x$. Le reste du chapitre est consacré à l'étude de fonctions importantes en analyse complexe : les fonctions modulaires et les fonctions elliptiques.

Le chapitre 12, relativement court, introduit un sujet qui en plusieurs variables est très important : le projecteur de Bergman, c'est-à-dire le projecteur orthogonal de $L^2(D)$ sur $L^2(D) \cap \mathcal{O}(D)$. Comme application de cette étude, on obtient que si D est lisse, borné et simplement connexe, les biholomorphismes de D sur $\mathbb{D}$ se prolongent en difféomorphismes de $\overline{D}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ au sens où toutes leurs dérivées partielles se prolongent continûment à $\overline{D}$, que les différentielles qui en résultent ne s'annulent jamais et qu'un phénomène analogue se produit pour les applications réciproques de ces biholomorphismes.

Le treizième et dernier chapitre de ce livre aborde le sujet des équations différentielles posées dans un contexte holomorphe. À moins de ne s'intéresser qu'aux équations différentielles linéaires, il n'est pas possible de faire l'impasse sur la notion de fonction holomorphe de plusieurs variables. C'est pourquoi le chapitre 13 commence par un bref exposé généralisant aux fonctions de plusieurs variables certaines propriétés des fonctions holomorphes d'une variable. Nous prouvons ensuite le théorème de Cauchy-Kowalevsky qui affirme l'existence et l'unicité d'une solution holomorphe au problème $y' = f(z, y)$ & $y(z_0) = w_0$ quand f est une fonction holomorphe de deux variables. Comme application, nous étudions les fonctions de Bessel. Comme Γ et ζ, elles font partie des fonctions dites spéciales et interviennent dans de nombreux problèmes concrets. L'équation de Kepler qui régit le mouvement des planètes en est un exemple.

Les fonctions de Bessel sont solutions d'une équation différentielle où intervient un paramètre ν. Ordinairement, ce paramètre est assigné à résider dans $\mathbb{R}$ et certaines valeurs semblent poser problème. Lorsqu'on libère ce paramètre en lui permettant d'explorer $\mathbb{C}$, les fonctions de Bessel deviennent des fonctions holomorphes de deux variables. Grâce aux propriétés de ces dernières, les valeurs du paramètre qui semblent exceptionnelles cessent d'être des accidents et il devient plus facile d'établir les propriétés des fonctions de Bessel.

Bien que les théories des fonctions holomorphes à une ou plusieurs variables présentent des points communs, les deux théories sont radicalement différentes comme le montre la dernière section du chapitre 13. Notons pour la petite histoire que le monde des mathématiques fut extrêmement surpris lorsque Hartogs démontra en 1906 qu'une fonction holomorphe de deux variables n'a pas de singularité isolée non éliminable. Par la suite, Hartogs mit en évidence d'autres phénomènes très surprenants comme par exemple le fait qu'une fonction dont les fonctions partielles sont holomorphes est holomorphe alors que la théorie des dérivées partielles réelles ne peut même pas prédire sa différentiabilité.

Bien que l'analyse complexe apporte un éclairage naturel et instructif sur les séries et la transformation de Fourier, nous avons du renoncer pour des raisons de place aux deux chapitres que nous avions prévus pour ces sujets. Nous espérons pouvoir les inclure dans une édition ultérieure.

Ce livre concrétise l'aboutissement d'un projet que nous avions amorcé avec Gennadi Henkin. Devenu en 1991 professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie, actuellement Sorbonne Université, mathématicien passionné animé d'une grande curiosité, il était en analyse complexe un spécialiste internationalement reconnu et nous avons beaucoup appris de lui pour notre recherche et nos enseignements. Hélas, Gennadi nous a prématurément quitté en 2016 et nous lui dédions ce livre.

Notations

- $\mathbf{1}_X$ fonction caractéristique de X ; elle vaut 1 sur X et 0 sur le complémentaire de X
- B^A = ensemble des applications de A dans B
- $\overline{A}$ = adhérence de A
- $\overset{\circ}{A}$ = intérieur de A
- A^{acc} = ensemble des points d'accumulation de A
- A^{iso} = ensemble des points isolés de A
- $|A|$ = Card A = cardinal de l'ensemble A
- $A \subset\subset B$: se lit A est relativement compact dans B et signifie que $\overline{A}$ est un compact de $\overset{\circ}{B}$
- $A_\alpha^k = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$
- Arg = détermination principale de l'argument ; Arg_0 = détermination de l'argument sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $]0, 2\pi[$
- $B(a,R) = \{d(a,.) < R\}$ = boule de centre a et de rayon R dans un espace métrique (E,d)
- $bA = \overline{A}\backslash\overset{\circ}{A}$.
- chemins
  - $\underline{\alpha}$ est le lacet constant $[0,1] \ni t \mapsto \alpha$
  - $\alpha \vee \beta$ est le chemin obtenu par concaténation des chemins α et β
  - $\widetilde{\alpha}$ est le chemin α parcouru dans le sens opposé
  - $\lg(\gamma)$ = longueur de γ
  - $\langle\gamma\rangle$ est l'image ou support du chemin γ
  - $[z_1, z_2]^+$ est le chemin $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)z_1 + tz_2$.
  - $[z_1, ..., z_n]^+$ est une concaténation de $[z_1, z_2]^+$, ..., $[z_{n-1}, z_n]^+$
  - $\mathbb{T}^+$ est le chemin $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto e^{i\theta}$.
  - $C(a,R)^+$ ou $\partial D(a,R)$ est le chemin $[0,2\pi] \ni \theta \mapsto a + Re^{i\theta}$; $C(\infty, r)^+ = C(0,r)^-$
  - $Ch(X)$ est l'ensemble des chemins de X ; $Ch^1_{pm}(X)$ est l'ensemble des chemins X qui sont de classe C^1 par morceaux
  - $\mathcal{L}a(X)$ est l'ensemble des lacets de X ; $\mathcal{L}a^1_{pm}(X) = Ch^1_{pm}(X) \cap \mathcal{L}a(X)$.
  - $\mathrm{Reg}\,\gamma$ = ensemble des points où γ est dérivable
  - $\mathrm{Sing}\,\gamma$ = ensemble des points où γ n'est pas dérivable
- ∂K = bord orienté du compact à bord K
- $C_\alpha^k = \frac{A_\alpha^k}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$

- $C_c^k(U)$ = espace des fonctions de classe C^k sur U et à support compact
- $\mathcal{CB}(X)$ = espace des fonctions continues et bornées sur X
- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ = espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$
- $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ = espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact
- $C(a,R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| = R\}, 0 \leqslant R < +\infty, \mathbb{T} = C(0,1)$
- $A(a,R,S) = \{z \in \mathbb{C};\ R < |z-a| < S\}, 0 \leqslant R < S \leqslant +\infty$
- $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < R\}, 0 \leqslant R \leqslant +\infty, D^*(a,R) = D(a,R) \setminus \{a\}$,
- $\mathbb{D} = D(0,1)$, $\mathbb{E} = \{\mathrm{Re} > 0\}$ et $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im} > 0\}$
- $D^*(\infty,R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > R\} = A(0,R,+\infty)$
- $d^c = i\left(\overline{\partial} - \partial\right), \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}, \partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$
- $d_E(z) = dist(z,E) = \inf\{dist(z,e);\ e \in E\};\ dist(.,\varnothing) = +\infty$
- $\delta_E = -d_E$ sur $\mathring{E}$ et $\delta_E = d_E$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathring{E}$
- λ = mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{R}$) ou, selon le contexte, la fonction modulaire
- $\ell^p(\mathbb{C}) = \left\{\left(a_n\right) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \left(\sum |a_n|^p\right) \text{ converge}\right\}, \ell_0 = \left\{\left(a_n\right) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \lim a_n = 0\right\}$
- ln = logarithme népérien = primitive de $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1
- Log = détermination principale du logarithme ; Log_0 = détermination du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\{0 < \mathrm{Im} < 2\pi\}$
- $\lim\limits_{a^*} f = \lim\limits_{z \to a^*} f(z) = \lim\limits_{z \to a,\ z \neq a} f(z)$
- $L_{loc}^1(U)$ = espaces des fonctions localement intégrables sur U pour la mesure de Lebesgue
- $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ = espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ = espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
- $Mat_u(f)$ = matrice de l'application linéaire f dans la base u
- $m_f(a)$ = multiplicité de f en a = ordre d'annulation de f en a
- μ_α est la transformation de Möbius de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, $z \mapsto (\alpha - z)/\left(1 - \overline{\alpha} z\right), \alpha \in \mathbb{T}$
- $\nabla_z f$ = gradient de f en $z = \frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$
- $\mathrm{PP}_f(a)$ = partie principale ou polaire de f en a
- p_α détermination principale de la puissance alpha
- $\mathcal{P}_F(J)$ est l'ensemble des parties finies de J.
- $\mathcal{P}(f)$ = ensemble des pôles de f
- $X \subset\subset Y$: X est relativement compact dans Y ou encore : $\overline{X}$ est compact et $\overline{X} \subset \mathring{Y}$
- $f\Big|_A^B$ = restriction de $f : E \to F$ à $A \subset E$ et $B \subset F$ quand $f(A) \subset B$.
- $f^\# = \frac{|f'|}{1+|f|^2}$
- $\|f\|_E = \sup\limits_{x \in E} |f(x)| \in [0,+\infty]$ pour $f : E \to \mathbb{C}$

- $\|f\|_{L^\infty(X)} = \inf\{M \in \mathbb{R},\ |f| \leqslant M\ p.p.\}$
- $\mathcal{O}(U, V)$ ensemble des fonctions holomorphes de U dans V ; $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(U, \mathbb{C})$.
- $[x] = E(x)$ = partie entière de x
- $\mathfrak{P}$ est l'ensemble des nombres premiers
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ = espace des fonctions à décroissance rapide
- $\operatorname{Supp} f$ = support de $f = \overline{\{f \neq 0\}}$
- $\langle a, b, c\rangle$ = triangle de sommets $a, b, c = \{ra + sb + tc,\ 0 \leqslant r, s, t \leqslant 1,\ r + s + t = 1\}$
- $\mathbb{T} = C(0, 1)$
- $\tau_a = Id - a$
- $\sqcup$: réunion disjointe, $E = A \sqcup B$ signifie que $E = A \cup B$ et que $A \cap B = \varnothing$
- $\mathcal{V}_E(x)$ = ensemble des voisinages de x dans E
- $\mathcal{Z}(f) = \{f = 0\}$

Chapitre 1 Le plan complexe

L'idée des nombres complexes est apparue dans l'algèbre de Bombelli (1572) en rapport avec les formules dites de Tartaglia-Cardan (1545) pour les racines des polynômes de degré 3 mais une des motivations principales qui a mené aux nombres complexes est probablement une question posée par Leibniz en 1702 : un polynôme non constant à coefficients réels admet-il une décomposition en produits de polynômes de degré 1 ou 2 ?. Cette question a été de nouveau considérée par Euler (1739, 1743) pour formuler son principe fondamental des équations différentielles linéaires à coefficients constants : les solutions de l'équation différentielle $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y^{(0)} = 0$ sont de la forme $x \mapsto \sum_{1\leqslant j\leqslant k} P_j(x)\, e^{r_j x}$ où $r_1, ..., r_k$ sont les racines complexes deux à distinctes du polynôme caractéristique $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ et où pour $1 \leqslant j \leqslant k$, P_j est un polynôme à coefficients complexes dont le degré est au plus la multiplicité de r_j dans P. En 1746, en étudiant les primitives des fonctions rationnelles, d'Alembert a répondu positivement au problème de Leibnitz par le théorème fondamental de l'algèbre (Théorème 25) mais la première preuve rigoureuse est due à Gauss en 1799. Des approches plus approfondies concernant le corps de nombres complexes ont été données ensuite par Wessel (1799), Buée (1806) et Argand (1806).

La première section de ce chapitre a pour objet de rappeler des choses bien connues sur les nombres complexes et de fixer quelques notations. Les sections 2 et 3 de ce chapitre peuvent être réservées pour une seconde lecture.

1 Rappels et notations

On considère comme connue[1] la construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et nous énonçons sans démonstration des propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$:

1. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps.
2. Le polynôme $X^2 + 1$ admet dans $\mathbb{C}$ exactement deux racines qu'on note i et $-i$.
3. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont $(1, i)$ est une base. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe donc un unique couple de réels noté $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ tel que $z = \operatorname{Re}\ z + i \operatorname{Im} z$; les applications Re (partie réelle) et Im (partie imaginaire) sont $\mathbb{R}$-linéaires. Dans la suite, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont identifiés via l'isomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$, $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ et on parle de $\mathbb{C}$ comme du plan ou du plan complexe.
4. L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \to \overline{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ est appelée conjugaison.
5. Le module d'un nombre complexe z est le réel $|z| = \left[(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\right]^{1/2}$. Le module est la norme euclidienne du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ associée au produit scalaire

1. Deux façons de construire $\mathbb{C}$ sont proposées dans l'annexe.

réel $\langle .,. \rangle$ défini par

$$\forall z, \zeta \in \mathbb{C},\ \langle z, \zeta \rangle = \operatorname{Re} z\ \operatorname{Re} \zeta + \operatorname{Im} z\ \operatorname{Im} \zeta\ = \operatorname{Re}\left(z\overline{\zeta}\right).$$

L'égalité du parallélogramme s'écrit

$$\forall z, \zeta \in \mathbb{C},\ |z+\zeta|^2 = |z|^2 + |\zeta|^2 + 2\langle z, \zeta \rangle = |z|^2 + |\zeta|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z\overline{\zeta}\right).$$

Le module vérifie l'inégalité triangulaire

$$\forall z, \zeta \in \mathbb{C},\ \big|\,|z| - |\zeta|\,\big| \leqslant |z-\zeta| \leqslant |z| + |\zeta|.$$

et de plus

$$\forall z, \zeta \in \mathbb{C},\ |z.\zeta| = |z|\ |\zeta|.$$

6. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z.\overline{z} = |z|^2$. Ainsi, $z^{-1} = \overline{z}/\,|z|^2$ lorsque $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.
7. Le théorème ci-après énonce le théorème fondamental de l'algèbre : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. La preuve[1] que nous en donnons est celle d'Argand. Elle repose sur l'existence pour tout nombre complexe z et tout $k \in \mathbb{N}^*$ d'un nombre complexe w tel que $z = w^k$. Ce fait, qui résulte de la surjectivité de l'exponentielle complexe, est prouvé dans le corollaire 2.30 qui est établi sans faire appel au théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème 1.1 (d'Alembert-Gauss)

Un polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Preuve

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de prouver que le réel $m = \inf\limits_{\mathbb{C}} |P|$ est en fait une valeur de $|P|$ et qu'il est nul. Puisque $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, on peut fixer ρ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $|P(z)| > |P(0)|$ lorsque $|z| \geqslant \rho$. Ainsi, $\inf\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,\rho)}} |P| \geqslant |P(0)| \geqslant \inf\limits_{\overline{D(0,\rho)}} |P|$ et $m = \inf\limits_{\overline{D(0,\rho)}} |P|$. $|P|$ étant continu, $|P|$ a un minimum sur le compact $\overline{D(0,\rho)}$ et on peut se donner $\omega \in \overline{D(0,\rho)}$ tel que $|P(\omega)| = m$; en fait $|\omega| < \rho$ car si $|z| = \rho$, $|P(z)| > |P(0)| \geqslant |P(\omega)|$. Pour $\zeta \in \mathbb{C}$, on a donc

$$m = |P(\omega)| \leqslant |P(\zeta+\omega)|\,. \tag{1.1}$$

Puisque P est un polynôme, P s'écrit $P(\omega) + (X-\omega)^k R(X-\omega)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $R \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas en 0. Pour $\zeta \in \mathbb{C}$, on a donc $P(\zeta+\omega) = P(\omega) + \zeta^k R(\zeta)$ et avec (1.1), on obtient

$$m^2 \leqslant |P(\zeta+\omega)|^2 = \left|P(\omega) + \zeta^k R(\zeta)\right|^2 = m^2 + 2\operatorname{Re}\left(\overline{P(\omega)}\,\zeta^k\, R(\zeta)\right) + |\zeta|^{2k}\,|R(\zeta)|^2$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant 2\operatorname{Re}\left(\overline{P(\omega)}\,\zeta^k\, R(\zeta)\right) + |\zeta|^{2k}\,|R(\zeta)|^2\,.$$

1. Celle-ci peut être réservée à une seconde lecture.

Grâce au corollaire 2.30, on peut choisir *a priori* ζ de la forme $t\alpha$ où $t \in \mathbb{R}_+^*$ et α est une racine $k^{ème}$ de $-P(\omega)\overline{R(0)}$. On obtient alors que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leqslant t^k \left(-2\,|P(\omega)|^2\,\overline{R(0)}R(t\alpha) + t^k\,|\alpha|^{2k}\,|R(t\alpha)|^2\right)$$

ce qui, après simplification par le réel strictement positif t^k et passage à la limite quand t tend vers 0^+, livre $0 \leqslant -2\,|P(\omega)\,R(0)|^2$ et donc que $P(\omega) = 0$ puisque $R(0) \neq 0$. ■

Nous pouvons maintenant répondre positivement à la question posée par Leibnitz.

Corollaire 1.2

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, P a n racines si on compte celles-ci avec leur multiplicité.

Preuve

Il suffit de faire une récurrence sur le degré de P car $(X-\alpha)\,|\,P$ si $P(\alpha) = 0$. ■

2 La sphère de Riemann*

Certains énoncés de l'analyse complexe deviennent plus clairs et synthétiques quand on introduit la notion de « point à l'infini » du plan complexe. Cette section a pour but de formaliser cette idée. Ce faisant, nous construisons le premier exemple de ce qu'on appelle une variété complexe de dimension 1.

Assimilant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et considérant par un abus de langage que $\mathbb{R}^2$ est contenu dans $\mathbb{R}^3$, on fixe un point noté ∞ qui n'est pas dans $\mathbb{C}$ et on pose $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On munit cet ensemble d'une topologie en décrétant que

(V1) Si $z \in \mathbb{C}$, X est un voisinage de z dans $\mathbb{S}$ lorsque X contient un voisinage de z dans $\mathbb{C}$; les voisinages de z dans $\mathbb{S}$ sont alors ceux de z dans $\mathbb{C}$ et les ensembles de la forme $U \cup \{\infty\}$, $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z)$.

(V2) X est un voisinage de ∞ dans $\mathbb{S}$ lorsqu'il existe $R > 0$ tel $\mathbb{S} \backslash D(0, R) \subset X$.

Étant donné que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la trace sur $\mathbb{C}$ d'un voisinage de z dans $\mathbb{S}$ est un voisinage de z dans $\mathbb{C}$, la topologie induite par $\mathbb{S}$ sur $\mathbb{C}$ est la topologie habituelle de $\mathbb{C}$. Par conséquent pour une partie de $\mathbb{C}$, intérieur dans $\mathbb{C}$ et intérieur dans $\mathbb{S}$ sont identiques. Ce n'est le cas ni pour les adhérences, ni pour les bords :

Lemme 1.3 *Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On note $\widehat{A}$ son adhérence dans $\mathbb{S}$ et $\overline{A}$ celle dans $\mathbb{C}$. Alors, si A est bornée, $\overline{A} = \widehat{A}$ tandis que si A est non bornée, $\widehat{A} = \overline{A} \cup \{\infty\}$.*

Preuve

Si $z \in \overline{A}$, tout voisinage de z dans $\mathbb{C}$ et donc, du fait de leur définition, tout voisinage de z dans $\mathbb{S}$, rencontre A. Par conséquent, $\overline{A} \subset \widehat{A}$. Si $z \in \widehat{A}$ et $z \neq \infty$, la définition des voisinages dans $\mathbb{S}$ de z donne directement que $z \in \overline{A}$. Donc $\widehat{A} \subset \overline{A} \cup \{\infty\}$. Si A est bornée, il existe $r > 0$ tel que $A \subset D(0,r)$. $\mathbb{S}\backslash D(0,r) \in \mathcal{V}_{\mathbb{S}}(\infty)$ et $A \cap \mathbb{S}\backslash D(0,r) = \varnothing$ de sorte que $\infty \notin \widehat{A}$. Si A est non bornée, (V2) donne que $\infty \in \widehat{A}$. ■

Le vocable de sphère de Riemann pour $\mathbb{S}$ semble inapproprié. Pourtant, il est effectivement possible de voir $\mathbb{S}$ comme la sphère unité $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ pour la norme euclidienne usuelle. On pose

$$N = (0,0,1) \ \ et \ \mathcal{U} = \mathcal{S}\backslash \{N\}.$$

On appelle projection stéréographique de pôle N de $\mathcal{U}$ sur le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, l'application p définie par

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathcal{U} & \to & \mathcal{P} \\ & M & \to & M' \ où \ \{M'\} = (NM) \cap \mathcal{P} \end{array}. \tag{1.2}$$

Le plan $\mathcal{P}$ peut être identifié naturellement à $\mathbb{C}$ via l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C}$, θ : $(x,y,0) \mapsto x+iy$. Il est alors possible de construire une application φ de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{S}$ en posant

$$\varphi(M) = \left| \begin{array}{l} \theta \circ p(M) \ \ si \ M \neq N \\ \infty \ si \ M = N \end{array} \right. ; \tag{1.3}$$

par abus de langage, on parle aussi de projection stéréographique pour φ. On vérifie sans difficulté que l'application ψ de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{S}$ définie par

$$\psi(z) = \left| \begin{array}{l} \left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \ si \ z \neq \infty \\ N \ si \ z = \infty \end{array} \right.$$

vérifie $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{S}}$ et $\psi \circ \varphi = Id_{\mathcal{S}}$. φ est donc bijective et son application réciproque est ψ. φ est évidemment continue sur $\mathcal{U}$. Un calcul immédiat montre que si $m = (a,b,c) \in \mathcal{U}$, $\varphi(m) = (a+ib)/(1-c)$. On en déduit que $\lim\limits_{m \to N,\, m \in \mathcal{S}} \varphi(m) = \infty$ et donc φ est continue sur $\mathcal{S}$. Il est tout aussi évident que ψ est continue sur $\mathbb{S}$. φ étant continue bijective d'application réciproque continue, nous avons :

Proposition 1.4

$\mathcal{S}$ et $\mathbb{S}$ sont homéomorphes. En particulier, $\mathbb{S}$ est un espace topologique métrisable connexe, compact et complet.

Cette proposition permet d'utiliser dans $\mathbb{S}$ les techniques habituelles des espaces métriques, notamment les critères utilisant les suites.

3 Homographies*

Dans cette section, nous étudions les transformations rationnelles de la sphère de Riemann. Celles-ci jouissent de propriétés géométriques remarquables et permettent de prouver de façon élégante nombre de jolis résultats sur les faisceaux de cercles ou de droites.

Définition 1.5

Une application $T : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ est une homographie s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et

1. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $c \neq 0$;
2. $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ et $T(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c \neq 0$;
3. $T(\infty) = \infty$ si $c = 0$.

On dit dans ce cas que T est l'homographie de paramètre (a, b, c, d).

Au vu de cette définition, il est commode dans cette section de convenir que $\frac{1}{0}$ est le point ∞ de la sphère de Riemann $\mathbb{S}$, que $\frac{1}{\infty} = 0$ que si $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, $a \times \infty = \infty$ et $\infty + b = \infty$. La formule (1) devient alors vraie sans restriction. Pour (2), on remarque que $T(z) = \frac{a+b/z}{c+d/z}$ et donc que $T(\infty) = \frac{a+0}{c+0} = \frac{a}{c}$. Pour (3), l'écriture livre $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ et donc $T(\infty) = \infty + \frac{b}{d} = \infty$. Ainsi, ces conventions permettent de calculer $\frac{az+b}{cz+d}$ dans tous les cas. Notez cependant que $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$ n'ont toujours pas de sens.

Exemple 1.6 *Les cas particuliers suivants sont appelés transformations géométriques élémentaires :*

1. $T(z) \equiv az$, $a \in \mathbb{R}_+^*$; *T est alors une homothétie de rapport a .*
2. $T(z) \equiv az$, $a = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$; *T est alors une rotation d'angle mesuré par θ.*

   Toute application homographique $\mathbb{C}$-linéaire $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}^*$, est la composée d'une homothétie et d'une rotation ($a = |a|\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$).
3. $T(z) \equiv z + b$; *T est alors une translation de vecteur b.*
4. $T(z) \equiv \frac{1}{z-a}$, $a \in \mathbb{C}$. *Dans ce cas, ont dit que T est l'inversion de pôle a.*

Le lecteur est invité à vérifier que si C est un cercle contenu dans la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$, son image par la projection stéréographique φ définie par la formule 1.3 est un cercle de $\mathbb{C}$ lorsque $N \notin C$ mais que lorsque $N \in C$, cette image est une droite achevée, c'est-à-dire un ensemble de la forme $\Delta \cup \{\infty\}$ où Δ est une droite quelconque de $\mathbb{C}$. Inversement, toute partie de $\mathbb{S}$ qui est de l'une ou l'autre forme est l'image par φ d'un cercle de S. Il est donc légitime d'appeler quasi-cercle de $\mathbb{S}$ toute partie qui est un cercle de $\mathbb{C}$ ou une droite achevée de $\mathbb{C}$.

Proposition 1.7

1. Toute transformation homographique est la composée d'homothéties, translations ou inversions complexes.
2. L'image d'un quasi-cercle de $\mathbb{S}$ par une transformation homographique est un quasi-cercle de $\mathbb{S}$. Plus précisément, soit T une homographie et $\omega = T^{-1}(\infty)$.

Si C est un cercle de rayon positif bordant un disque Δ, soit $\omega \in C$ et alors $T(C) \setminus \{\infty\}$ est une droite et $T(\Delta)$ est l'un des demi-plans de $\mathbb{C} \backslash T(C)$, soit $\omega \notin C$ et alors $T(\Delta)$ est un disque bordé par le cercle $T(C)$. Si L est une droite, soit $\omega \in L$ et alors $T(L \cup \{\infty\})$ est un cercle, soit $\omega \notin L$ et alors $T(L)$ est une droite.

3. Toute transformation homographique est une bijection de $\mathbb{S}$ dont l'inverse est une transformation homographique.
4. Soit T une transformation homographique, $T : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$. La restriction de T à $\mathbb{C} \backslash \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ à valeurs dans $\mathbb{C} \backslash \left\{\frac{a}{c}\right\}$ est une application biholomorphe.

Preuve

1) Lorsque T est l'homographie de paramètre (a, b, c, d) avec $c \neq 0$ on peut écrire $T(z) = \frac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}$.

2) Soit T une homographie. Si $c = 0$, T est une similitude et c'est un résultat bien connu de géométrie élémentaire qu'une similitude transforme un cercle en cercle et une droite en droite. Par ailleurs, puisque $\tau_a = Id_{\mathbb{S}} + a$ laisse fixe le point ∞ pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'existence $a \in \mathbb{C}$ tel que (2) soit vraie pour $S = T \circ \tau_{-a}$, entraîne que (2) est aussi vraie pour $T = S \circ \tau_a$. Compte tenu de (1), il suffit donc de prouver (2) pour $\varphi = \frac{1}{Id_{\mathbb{S}}}$.

L'équation d'un cercle Q non réduit à son centre dans $\mathbb{C}$ est de la forme

$$\alpha |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{\beta}\right) + \gamma = 0$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$ si $\gamma = 0$. Puisque $\infty \notin Q$, il vient pour $w \in \mathbb{S}$ que,

$$\begin{aligned} w \in \varphi(Q) \quad & \Leftrightarrow \varphi^{-1}(w) \in Q \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \left|\frac{1}{w}\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{w}\overline{\beta}\right) + \gamma = 0 \\ \frac{1}{w} \neq \infty \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q \ni 0 = \varphi^{-1}(\infty) \\ w = \infty \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} \varphi(Q) \not\ni 0 \\ \alpha^2 + 2\,\mathrm{Re}(w\beta) + \gamma |w|^2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Pour que $\varphi(Q)$ soit un cercle, il est nécessaire que γ soit non nul c'est-à-dire que $0 \notin Q$. Si $0 \in Q$, $\gamma = 0$ et $\beta \neq 0$ et donc l'équation de $\varphi(Q) \setminus \{\infty\}$ est celle d'une droite. Ainsi, $\varphi(Q)$ est un cercle si et seulement si $\varphi^{-1}(\infty) \notin Q$. Dans ce cas, $\varphi(\mathbb{C} \backslash Q)$ a deux composantes connexes, à savoir $\varphi(\Delta)$ et $\varphi\left(\mathbb{C} \backslash \overline{\Delta}\right)$. Comme $\varphi\left(\overline{\Delta}\right)$ est un compact de $\mathbb{S}$ contenu dans $\mathbb{C}$, $\varphi\left(\overline{\Delta}\right)$ est un compact de $\mathbb{C}$ et donc une partie bornée de $\mathbb{C}$. Comme $\varphi(Q)$ est un cercle, il s'ensuit que $\varphi(\Delta)$ est la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \backslash \varphi(Q)$, c'est-à-dire le disque bordé par $\varphi(Q)$. Si $\varphi^{-1}(\infty) \in Q$, un raisonnement similaire sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \backslash \varphi(Q)$ livre que $\varphi(\Delta)$ est l'un des demi-plans bordés par la droite $\varphi(Q) \setminus \{\infty\}$.

Puisque φ est une involution, ce qui vient d'être fait donne directement les affirmations sur les images par φ de Q.

3) T étant l'homographie de paramètre (a, b, c, d), pour tout $(w, z) \in \mathbb{S}^2$, l'équation $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est équivalente à $z = S(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$.

4) Les applications T et S du point précédent sont holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $\mathbb{C}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}$ respectivement. ■

Lemme 1.8 *Soient α, β, γ trois points distincts de $\mathbb{S}$. Il existe une unique transformation homographique T telle que $T(\alpha) = 0$, $T(\beta) = 1$ et $T(\gamma) = \infty$.*

Preuve

Si les trois points sont distincts de ∞, on prend $T : z \mapsto \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\frac{z-\alpha}{z-\gamma}$. Si $\alpha = \infty$ on prend $T : z \mapsto \frac{\beta-\gamma}{z-\gamma}$, si $\beta = \infty$ on prend $T : z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\gamma}$ et si $\gamma = \infty$ on prend $T : z \mapsto \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$. Supposons que T et S sont des transformations homographiques telles que

$$T(\alpha) = S(\alpha) = 0, T(\beta) = S(\beta) = 1, T(\gamma) = S(\gamma) = \infty$$

Alors $H = T \circ S^{-1}$ est une transformation homographique $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ telle que $H(0) = 0, H(1) = 1, H(\infty) = \infty$. On obtient $b = d$, $a + b = c + d$ et $c = 0$, donc $H = Id$ et $S = T$. ■

Définition 1.9

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des points distincts de $\mathbb{S}$. On appelle birapport de ces quatre points le nombre complexe $T\left(z_1\right)$ où T est l'unique transformation homographique telle que $T(z_2) = 0, T(z_3) = 1, T(z_4) = \infty$; on note $\left(z_1 : z_2 : z_3 : z_4\right)$ ce nombre.

Proposition 1.10

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des points distincts de $\mathbb{S}$ et T une transformation homographique. Alors $\left(T\left(z_1\right) : T\left(z_2\right) : T\left(z_3\right) : T\left(z_4\right)\right) = \left(z_1 : z_2 : z_3 : z_4\right)$.

Preuve

Puisque T est une bijection, les points $w_1 = Tz_1, w_2 = Tz_2, w_3 = Tz_3, w_4 = Tz_4$ sont distincts. Soit H l'unique transformation homographique telle que $H\left(w_2\right) = H\left(T(z_2)\right) = 0, H\left(w_3\right) = H\left(T(z_3)\right) = 1, H\left(w_4\right) = H\left(T(z_4)\right) = \infty$. D'après le lemme 1.8, $S = H \circ T$ est l'unique transformation homographique telle que $S(z_2) = 0, S(z_3) = 1, S(z_4) = \infty$. Donc par définition, $\left(Tz_1 : Tz_2 : Tz_3 : Tz_4\right) = H\left(Tz_1\right)$ et $\left(z_1 : z_2 : z_3 : z_4\right) = Sz_1 = H\left(Tz_1\right)$, d'où l'égalité de l'énoncé. ■

Proposition 1.11

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des points distincts de $\mathbb{S}$. Alors les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont sur le même quasi-cercle si et seulement si le birapport $\left(z_1 : z_2 : z_3 : z_4\right)$ est réel.

Preuve

Supposons que $\left(z_1 : z_2 : z_3 : z_4\right) \in \mathbb{R}$. Soit alors T l'unique transformation homographique telle que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$, $T(z_4) = \infty$. Puisque $\left(z_1 : z_2 : z_3 : z_4\right) = Tz_1 \in \mathbb{R}$, $z_1 \in T^{-1}(\widetilde{\mathbb{R}})$, où $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Comme T^{-1} est une transformation homographique et $\widetilde{\mathbb{R}}$ un quasi-cercle de $\mathbb{S}$, $T^{-1}(\widetilde{\mathbb{R}})$ est un quasi-cercle d'après la proposition 1.7. Il contient z_1, z_2, z_3 et z_4 par construction.

Réciproquement, supposons que z_1, z_2, z_3, z_4 sont sur le même quasi-cercle C. Soit alors T l'homographie prescrite par $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ et $T(z_4) = \infty$. D'après la proposition 1.7, $T(C)$ est un quasi-cercle. Puisque par construction il contient ∞, $T(C) = \Delta \cup \{\infty\}$ où Δ est une droite affine réelle de $\mathbb{C}$ qui contient 0 et 1. Ceci force $\Delta = \mathbb{R}$. Comme $z_1 \neq z_4$, $T\left(z_1\right) \in T(C) \setminus \left\{T\left(z_4\right)\right\} = \mathbb{R}$. ■

Remarque. *Soient z_2, z_3, z_4 et respectivement w_2, w_3, w_4 des points distincts de $\mathbb{S}$. Les propositions 1.10 et 1.11 nous permettent d'écrire la transformation homographique T qui transforme le quasi-cercle C_z passant par z_2, z_3, z_4 en le quasi-cercle C_w passant par w_2, w_3, w_4 telle que $Tz_2 = w_2, Tz_3 = w_3, Tz_4 = w_4$. En effet T est la transformation homographique obtenue en écrivant w comme fonction de z dans l'équation $\left(z : z_2 : z_3 : z_4\right) = \left(w : w_2 : w_3 : w_4\right)$.*

Exercices

1.1 Déterminer géométriquement les ensembles suivants.

a) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$, $\{z \in \mathbb{C};\ |z-a| = |z-b|\}$.

b) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$, $\{z \in \mathbb{C};\ |z-a| + |z-b| = c\}$.

c) Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(az+b) = c\}$.

d) Pour $\varphi, \psi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\varphi < \psi$ et $a < b$, $\left\{z \in \mathbb{C};\ a < \operatorname{Re} z < b \ \&\ \exists \theta \in [\varphi, \psi],\ z = |z|\, e^{i\theta}\right\}$.

1.2 Calculer $(1-i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Soient $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}^*$. Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes : (1) $\left|z_1 + \cdots + z_n\right| = \left|z_1\right| + \cdots + \left|z_n\right|$; (2) les z_j appartiennent à une même demi-droite issue de l'origine ; (3) $\frac{z_1}{\left|z_1\right|} = \cdots = \frac{z_n}{\left|z_n\right|}$.

1.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Vérifier que $\prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \left(X - \omega^k\right) = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} X^j$. En déduire que $\prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

1.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(1+i)z - 1 = 0$.

1.6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{n-1} = \overline{z}$ d'inconnue z et de paramètre $n \in \mathbb{N}$.

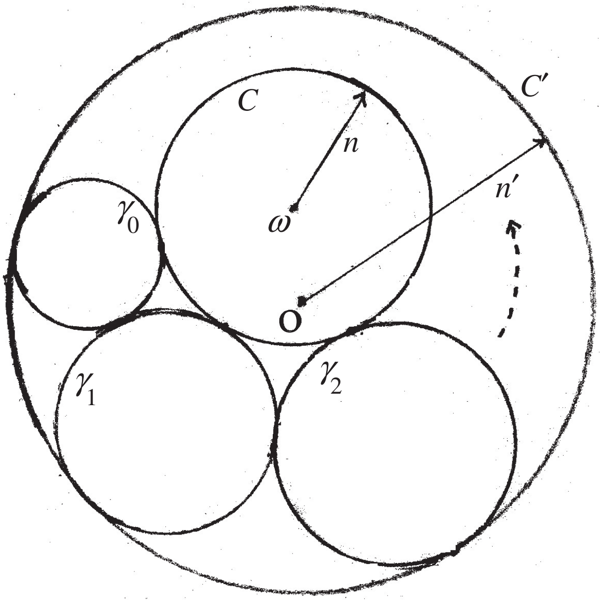
1.7 On considère dans le plan complexe trois points A, B et C formant un triangle T. On construit A' de sorte que $\left(A'BC\right)$ soit un triangle équilatéral dont le triangle plein associé ne rencontre pas celui associé à T ; on construit de façon similaire B' et C'. Prouver que $AA' = BB' = CC'$ et que les droites $\left(AA'\right)$, $\left(BB'\right)$ et $\left(CC'\right)$ se coupent en un même point avec un angle mesuré par $2\pi/3$.

1.8* Dans ce problème, $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère de Riemann munie des règles opératoires usuelles permettant de considérer les homographies comme des applications $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homographies de $\mathbb{S}$.

1. Démontrer que tout élément de $\mathcal{H}$ autre que l'identité possède dans $\mathbb{S}$ un ou deux points fixes.
2. Deux éléments f et g de $\mathcal{H}$ sont dits conjugués s'il existe $\varphi \in \mathcal{H}$ tel que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$.
   a) Démontrer que toute homographie qui a un unique point fixe dans $\mathbb{S}$ est conjuguée à une translation.
   b) Etablir par une conjugaison explicite que toute homographie f qui a deux points fixes distincts dans $\mathbb{S}$ est conjuguée à une similitude directe à centre de centre 0 de rapport $f'(\alpha)$ où α est un point fixe de f différent de ∞ et f' la fonction associée à la dérivée de la fraction rationnelle formelle associée à f.
3. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et G_α l'ensemble constitué de l'identité et des éléments f de $\mathcal{H}$ admettant α comme unique point fixe. Prouver que si $f \in G_\alpha$, il existe un unique nombre complexe noté $B(f)$ tel que
$$\frac{1}{f - \alpha} = \frac{1}{Id_{\mathbb{S}} - \alpha} + B(f). \tag{1.4}$$
   Prouver que $\left(G_\alpha, \circ\right)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{C}, +)$.
4. Soient α et β deux nombres complexes distincts et $G_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des homographies laissant fixes α et β.
   a) Prouver que pour tout $f \in G_{\alpha,\beta}$, il existe un unique nombre complexe noté $\Gamma(f)$ tel que
$$\frac{f - \alpha}{f - \beta} = \Gamma(f)\, \frac{Id_{\mathbb{S}} - \alpha}{Id_{\mathbb{S}} - \beta}. \tag{1.5}$$
   Démontrer que Γ est un isomorphisme du groupe $\left(G_{\alpha,\beta}, \circ\right)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   b) Soit $f \in G_{\alpha,\beta}$. Vérifier que $\Gamma(f) = f'(\alpha)$.
5. **a)** Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f \in G_\alpha \setminus \left\{Id_{\mathbb{S}}\right\}$. Décrire en fonction de α et de $B(f)$ mais de façon géométrique les cercles de $\mathbb{C}$ laissés fixes par f. Indication : interpréter (1.5) comme une relation de conjugaison.
   b) Soient α et β deux nombres complexes distincts et $f \in G_{\alpha,\beta} \setminus \left\{Id_{\mathbb{S}}\right\}$. Décrire en fonction de α, β et $\Gamma(f)$ mais de façon géométrique les cercles de $\mathbb{C}$ laissés fixes par f. Indication : utiliser la conjugaison explicite du 2.b).

1.9* [Alternative de Steiner] On considère dans $\mathbb{C}$ deux cercles disjoints C et C', l'adhérence du disque ouvert D dont C est le bord étant contenu dans le disque ouvert D' bordé par C'. On note r le rayon de C et r' celui de C'.

On construit une suite de cercles de la manière suivante.



Le premier cercle est le bord $\gamma_0 = C\left(\omega_0, r_0\right)$ d'un disque ouvert contenu dans $E = D' \backslash \overline{D}$ tel que $\gamma_0 \cap C$ et $\gamma_0 \cap C'$ sont réduits à des points uniques (donc avec des contacts tangentiels). On choisit pour γ_1 l'un des deux cercles contenus dans $\overline{E}$ ne rencontrant chacun des cercles C, C' et γ_0 qu'en un point unique (donc avec contact tangentiel). Supposons construits des cercles γ_2, ..., γ_n contenus dans $\overline{E}$ tels que pour tout $j \in \{2, ..., n\}$, $\gamma_j \cap \gamma_{j-2} = \emptyset$ et $\gamma_j \cap C$, $\gamma_j \cap C'$ et $\gamma_j \cap \gamma_{j-1}$ sont des singletons. Le cercle γ_{n+1} est alors le cercle contenu $\overline{E}$ tel que $\gamma_{n-1} \cap \gamma_{n+1} = \emptyset$ et $\gamma_{n+1} \cap C$, $\gamma_{n+1} \cap C'$ et $\gamma_n \cap \gamma_{n+1}$ sont tous des singletons. La suite $\left(\gamma_j\right)$, dont en toute rigueur l'existence demeure à prouver, est en général infinie mais ce n'est pas toujours le cas... L'alternative de Steiner est que, C et C' étant fixés, si l'une de ces suites $\left(\gamma_j\right)$ est périodique, toute suite de ce type est périodique.

a) Prouver l'alternative de Steiner dans le cas particulier où C' et C sont centrés en 0. Exprimer alors en fonction du rayon r de C et du rayon r' de C' la condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(\gamma_j\right)$ soit périodique.

b) Prouver qu'on peut ramener le cas général au cas où $C' = \mathbb{T}$, ce qu'on suppose désormais.

c) Cette question nécessite les transformations de Möbius définies dans le chapitre 8. Prouver qu'il existe $a \in \mathbb{D}$ tel que $\mu_a(C)$ est un cercle centré en 0. En déduire que l'alternative de Steiner est vraie.