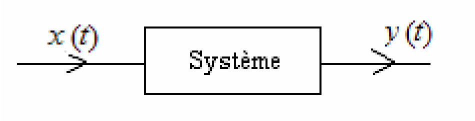
Chapitre I

NOTIONS SUR LES SYSTEMES

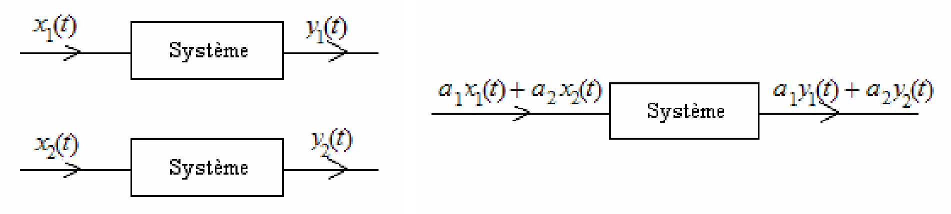
On appelle système, un dispositif produisant un signal $y(t)$ (plus généralement une grandeur physique que l'on peut toujours transformer en signal électrique) en réponse à un signal d'entrée $x(t)$. Le système peut être décrit mathématiquement par un opérateur O agissant sur la fonction $x(t)$ pour donner la fonction de sortie $y(t)$:



$$y(t) = O(x(t)) \qquad \text{(I,1)}$$

1. Systèmes linéaires

Soient deux signaux quelconques $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Les signaux de sortie du système correspondant aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont notés respectivement $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Le système est dit linéaire si, étant données deux constantes quelconques a_1 et a_2, à la combinaison linéaire de ces signaux en entrée $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, il fait correspondre en sortie la combinaison linéaire des signaux $y_1(t)$ et $y_2(t)$ avec les mêmes coefficients a_1 et a_2 : $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$.



$$a_1y_1(t)+a_2y_2(t) = O\left(a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right) \qquad \text{(I,2)}$$

En particulier on voit que si le système est linéaire, le doublement du signal d'entrée entraîne un doublement du signal de sortie. La non linéarité d'un amplificateur se traduit de manière visible sur un oscilloscope par un écrêtage des valeurs importantes du signal lors de l'augmentation du signal d'entrée.

2. Systèmes stationnaires

Un système est dit stationnaire si ses propriétés sont invariantes dans le temps.
Soit $y(t)$ la sortie correspondant à un signal d'entrée quelconque $x(t)$. Un système stationnaire fera correspondre à l'entrée retardée $x(t-\tau)$, la sortie retardée $y(t-\tau)$.
Sous forme symbolique on écrira :
Si l'on a $y(t) = O(x(t))$, alors $y(t-\tau) = O(x(t-\tau))$ (I,3)

Par définition, l'opérateur de translation dans le temps T_τ effectue la translation dans le temps d'une fonction $f(t)$ d'une quantité τ :

$$T_\tau f(t) = g(t) = f(t-\tau) \qquad \text{(I,4)}$$

Le membre de gauche de la relation (I,3) peut se lire : $y(t-\tau) = T_\tau y(t) = T_\tau O(x(t))$

Alors que le membre de droite de cette relation peut se lire : $O(x(t-\tau)) = O\left(T_\tau x(t)\right)$

En d'autres termes, on peut réécrire (I,3) sous la forme : $T_\tau O x(t) = O T_\tau x(t)$ (I,5)

On dit que les deux opérateurs commutent.

3. Systèmes continus

Soient la suite $x_n(t)$ de signaux d'entrée, et $x(t)$ la limite de cette suite lorsque n tend vers l'infini. Soient $y_n(t)$ et $y(t)$ les réponses respectives du système aux signaux $x_n(t)$ et à cette limite $x(t)$. Le système est continu si

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t). \qquad \text{(I,6)}$$

4. Systèmes linéaires invariants dans le temps (LIT)

Les systèmes physiques simples possèdent généralement la propriété d'être linéaires, invariants par translation dans le temps et continus. Seuls ces systèmes sont étudiés dans la suite de ce cours.

4.1 Fonctions propres des systèmes LIT

On dit qu'une fonction $f(t)$ est une fonction propre d'un opérateur O si l'action de l'opérateur système sur la fonction $f(t)$ donne une fonction proportionnelle à la fonction $f(t)$:

$$O(f(t)) = \lambda f(t), \qquad \text{(I,7)}$$

où λ est une constante complexe appelée valeur propre associée à la fonction propre $f(t)$.

Rôle de la fonction exponentielle e^{pt} :

L'objet de ce paragraphe est de montrer que les fonctions du temps de la forme exponentielle e^{pt} sont des fonctions propres des opérateurs linéaires, invariants par translation dans le temps.

L'opérateur T_τ défini plus haut effectue la translation dans le temps d'une fonction $f(t)$ d'une quantité τ :

$$T_\tau f(t) = g(t) = f(t-\tau) \qquad \text{(I,8)}$$

Lorsque τ est positif, le décalage s'effectue vers la droite. Dans ce cas, la valeur de la fonction $g(t)$ au temps t est celle qu'avait la fonction $f(t)$ au temps antérieur $t-\tau$.

Il existe une relation entre l'opérateur de translation T_τ et l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$:

Il est supposé dans ce qui suit que la fonction $f(t)$ ainsi que ses dérivées sont suffisamment régulières. Le développement de Taylor de $f(t-\tau)$ s'écrit alors :

$$f(t-\tau) = f(t) - \tau\frac{df}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{\tau^3}{6}\frac{d^3 f}{dt^3} + \ldots + \frac{(-1)^n \tau^n}{n!}\frac{d^n f}{dt^n} + \ldots \qquad \text{(I,9)}$$

On peut écrire formellement l'opérateur de translation comme :

$$T_\tau = e^{-\tau\frac{d}{dt}} = 1 - \tau\frac{d}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2}{dt^2} - \frac{\tau^3}{6}\frac{d^3}{dt^3} + \ldots \qquad \text{(I,10)}$$

En effet : $T_\tau f(t) = e^{-\tau\frac{d}{dt}} f(t) = f(t) - \tau\frac{df}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{\tau^3}{6}\frac{d^3 f}{dt^3} + \ldots = f(t-\tau)$ (I,11)

On a reconnu la formule de Taylor donnant la valeur d'une fonction au voisinage d'un point.

On notera en outre que l'opérateur T_τ commute avec l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$.

En effet, $\frac{d}{dt} e^{-\tau\frac{d}{dt}} f(t) = f'(t) - \tau\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^3 f}{dt^3} - \frac{\tau^3}{6}\frac{d^4 f}{dt^4} + \ldots$ (I,12)

et aussi : $e^{-\tau\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} f(t) = f'(t) - \tau\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^3 f}{dt^3} - \frac{\tau^3}{6}\frac{d^4 f}{dt^4} + \ldots$ (I,13)

ce qui montre la commutativité des deux opérateurs : $\frac{d}{dt} T_\tau f = T_\tau \frac{d}{dt} f$ (I,14)

L'opérateur $\frac{d}{dt}$ joue un rôle fondamental dans la description de l'évolution des systèmes physiques en fonction du temps (par exemple dans les équations différentielles à coefficients constants rencontrées en électricité).

Il reste maintenant à montrer que T_τ et $\frac{d}{dt}$ ont même système de fonctions propres : En posant $O_1 = \frac{d}{dt}$ et $O_2 = T_\tau$, on a formellement :

$$O_1 O_2 = O_2 O_1 \qquad \text{(I,15)}$$

Soit f_1 une fonction propre de O_1 avec la valeur propre λ_1. En supposant en outre que les opérateurs sont linéaires. Il vient :

$$O_1 O_2 f_1 = O_2 O_1 f_1 = O_2 \lambda_1 f_1 = \lambda_1 O_2 f_1 \qquad \text{(I,16)}$$

Donc il apparaît que $O_2 f_1$ est aussi une fonction propre de O_1 avec la même valeur propre λ_1 que f_1.

On a nécessairement proportionnalité entre $O_2 f_1$ et f_1 puisqu'ils représentent un vecteur propre avec la même valeur propre. On voit ainsi que f_1 est aussi fonction propre de O_2. Ce résultat a une portée générale.

Dans le cas considéré ici, on cherche tout d'abord une fonction propre de l'opérateur $\frac{d}{dt}$.

La fonction f_1 doit satisfaire à l'équation différentielle : $\frac{d}{dt} f_1 = p f_1$. (I,17)

Il est usuel en France de noter p la valeur propre (qui est complexe dans le cas général) de l'opérateur $\frac{d}{dt}$ associée à la fonction propre f_1. Cette valeur propre est notée s dans les ouvrages anglo-saxons.

La solution de l'équation (I,17) qui est une équation différentielle du premier ordre à un coefficient constant s'écrit : $f_1 = Ae^{pt}$ (I,18)

On voit ainsi que les fonctions propres de l'opérateur $\frac{d}{dt}$ sont de la forme e^{pt}, où p est une constante complexe quelconque. On retiendra que :

$$\frac{d}{dt}e^{pt} = pe^{pt} \tag{I,19}$$

Du fait de la commutation des opérateurs, f_1 est aussi fonction propre de O_2.

On peut vérifier pour terminer que les exponentielles sont bien fonctions propres de l'opérateur de translation dans le temps : Soit $f_1 = e^{pt}$,

alors, $T_\tau e^{pt} = e^{p(t-\tau)} = Ce^{pt}$. La valeur propre est : $\lambda_1 = C = e^{-p\tau}$.

En résumé, les fonctions propres de l'opérateur de translation sont des fonctions exponentielles du temps.

On retiendra la propriété suivante, valable pour un système LTI quelconque :

> Soit O l'opérateur système. Dire que l'opérateur O est invariant par translation dans le temps revient à écrire la relation de commutation de l'opérateur système avec l'opérateur de translation $OT_\tau = T_\tau O$. Les fonctions propres de O seront à chercher parmi les fonctions propres de T_τ c'est à dire parmi les fonctions de la forme e ^{pt}.
>
> On aura ainsi : $O\left(e^{pt}\right) = \lambda e^{pt}$ (I,20)

Le rôle majeur qui sera joué par les fonctions $f(t) = e^{pt}$ pour les systèmes physiques LIT apparaît ici. Comme il sera précisé dans la suite, en électronique et en traitement du signal, la valeur propre λ de l'opérateur système est notée $H(p)$ puisqu'elle est une fonction de p dans le cas général.

4.2 Fonction de transfert et réponse en fréquence

Comme il a été montré plus haut, lorsqu'un signal de la forme $x(t)=e^{pt}$ est présenté en entrée d'un système linéaire, invariant par translation dans le temps, le signal de sortie aura la forme $y(t) = H(p)e^{pt}$ (I,21)

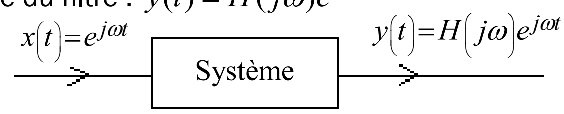
La valeur propre complexe $H(p)$ de l'opérateur est appelée fonction de transfert du système. Elle est aussi nommée transmittance du filtre.

Dans le cas où $x(t) = e^{j\omega t}$ (c'est-à-dire, lorsque p est imaginaire pur), le signal $x(t)$ est un signal monochromatique (on dit aussi signal harmonique) de pulsation ω écrit en notation complexe suivant la formule d'Euler.

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \tag{I,22}$$

On remarquera que l'on utilise pour représenter la partie imaginaire la quantité $j = \sqrt{-1}$ plutôt que i. Cette convention est courante en électricité et en analyse du signal pour éviter la confusion avec le courant i qui parcourt un circuit.

On aura en sortie du filtre : $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ (I,23)



On doit remarquer que le signal de sortie du filtre $y(t)$, est aussi monochromatique, et qu'il a la même pulsation que le signal d'entrée dans le filtre. $H(j\omega)$ prend le nom de réponse en fréquence. L'usage fait que la fonction $H(j\omega)$ est le plus souvent notée $H(\omega)$ en électronique et en analyse du signal. On sera attentif à éviter les difficultés posées par ce changement de notation.

En résumé, lorsque le signal d'entrée est monochromatique, le signal de sortie d'un filtre linéaire, invariant par translation dans le temps, est aussi monochromatique et a la même fréquence que le signal d'entrée.
Si le filtre est utilisé dans un régime non linéaire, comme c'est le cas d'un amplificateur opérationnel dont la sortie sature pour des grandes valeurs du signal d'entrée, la sortie n'est plus harmonique. Même lorsque le signal d'entrée est monochromatique, on voit apparaître des fréquences nouvelles en sortie, généralement multiples de la fréquence fondamentale du signal d'entrée. Dans l'exemple d'un amplificateur opérationnel en saturation, lorsque le signal d'entrée est sinusoïdal, son développement en série de Fourier n'a qu'un seul coefficient. Il correspond à la fréquence du sinus. Le signal de sortie, a une allure proche d'un signal rectangulaire périodique. Il aura un développement en série de Fourier possédant un nombre infini de coefficients pour les fréquences correspondant aux multiples impairs de la fréquence fondamentale.
Remarque : Une combinaison linéaire de deux fonctions propres n'est généralement pas fonction propre :
Soit en effet $f_1(t)$ et $f_2(t)$ deux fonctions propres de l'opérateur avec des valeurs propres différentes $O(f_1(t)) = \lambda_1 f_1(t)$ et $O(f_2(t)) = \lambda_2 f_2(t)$.
Alors : $O(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) = a_1\lambda_1 f_1(t) + a_2\lambda_2 f_2(t) \neq \lambda(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t))$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (I,24)
Ainsi, alors que $e^{j\omega t}$ et $e^{-j\omega t}$ sont des fonctions propres d'un système (filtre RC par exemple d'un système électrique) $cos\,\omega t = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ ne l'est pas dans le cas général.
On voit bien ainsi l'intérêt d'utiliser les exponentielles complexes plutôt que les fonctions trigonométriques sinus et cosinus dans les calculs.
Il est à souligner ici que les signaux physiques sont réels du type $\cos\omega t$ et non pas du type exponentiel complexe $e^{j\omega t}$ ou $e^{-j\omega t}$. D'ailleurs comment imaginer une fréquence négative $-\omega$ pour un signal ? Notre réponse est que les fréquences négatives sont une fiction mathématique introduite pour permettre des calculs aisés. On procèdera généralement ainsi dans les calculs : On effectue les calculs avec les exponentielles complexes puis à la fin on reviendra à des signaux réels en extrayant les parties réelles des résultats.

5. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

De nombreux systèmes physiques, électriques (lois d'Ohm généralisée) ou mécaniques (relation fondamentale de la dynamique) satisfont à l'équation générale suivante :

$$\frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}y(t)}{dt^{m-1}} + a_2\frac{d^{m-2}y(t)}{dt^{m-2}} + \ldots + a_m y(t) = b_0\frac{d^r x(t)}{dt^r} + b_1\frac{d^{r-1}x(t)}{dt^{r-1}} + \ldots + b_r x(t) \quad \text{(I,25)}$$

Il n'apparaît cette équation que des combinaisons linéaires invariables dans le temps, des dérivées des fonctions d'entrée et sortie $x(t)$ et $y(t)$. Comme précédemment l'étude d'un tel système LIT s'appuie sur sa fonction de transfert, c'est-à-dire sur la réponse du système $y(t) = H(p)e^{pt}$ à l'entrée $x(t) = e^{pt}$.

La dérivée d'ordre r de $x(t)$ qui apparaît dans l'équation (I,25) est dans ce cas :

$$\frac{d^r x(t)}{dt^r} = p^r e^{pt} \quad \text{(I,26)}$$

De même, la dérivée d'ordre m de $y(t)$ est : $\dfrac{d^m y(t)}{dt^m} = p^m H(p) e^{pt}$ (I,27)

Après remplacement dans l'équation (I,25) et simplification par e^{pt}, on aboutit à l'expression suivante de la fonction de transfert $H(p)$ du système :

$$H(p) = \frac{b_0 p^r + b_1 p^{r-1} + \ldots + b_r}{p^m + a_1 p^{m-1} + a_2 p^{m-2} + \ldots + a_m} \quad \text{(I,28)}$$

Les propriétés du système sont intégralement contenues dans les propriétés de la fonction $H(p)$ conditionnées par les positions des racines de son numérateur (zéros de la fonction de transfert) et de son dénominateur (pôles de la fonction de transfert).

6. Linéarité des systèmes physiques

Dans ce dernier paragraphe, on discute de cas de systèmes linéaires ou non linéaires. On attend généralement d'un amplificateur de signal d'être linéaire, c'est-à-dire satisfaisant à la propriété donnée par la formule (I,2). Un cas particulier de cette formule est que si le signal d'entrée est multiplié par un facteur 2 (ou 10, ou un nombre quelconque) la linéarité entraîne que le signal de sortie sera aussi multiplié par 2 (ou 10, ou le même nombre quelconque).
Par exemple, un montage constitué d'un amplificateur opérationnel de gain 50 est-il linéaire ? Si l'amplitude du signal d'entrée est multipliée par 10, le signal de sortie sera-t-il aussi multiplié par 10 ? Oui, tant que l'amplitude du signal de sortie n'atteint pas la tension d'alimentation de l'ampli op ($\pm$ 12 V par exemple). Au-delà le signal de sortie est saturé à $\pm$ 12 V.
Ce montage à amplificateur opérationnel sera donc considéré comme linéaire, tant que le signal de sortie ne dépasse pas $\pm$ 12 V, soit dans le cas d'un montage de gain 50, tant que le signal d'entrée n'atteint pas $\pm\dfrac{12}{50} = 240\,\mathrm{mV}$.
De manière générale, les non linéarités d'un système se manifestent lorsque l'amplitude du signal d'entrée du système est importante.
Deux exemples physiques de non linéarités sont l'amplificateur audio utilisé avec un fort signal d'entrée (l'ampli de guitare saturé, prisé par certains groupes de rock en est un exemple extrême) ou une lumière laser de forte intensité traversant un milieu transparent.
Comme il sera discuté dans le chapitre III sur les séries de Fourier, les non linéarités s'accompagnent de génération de composantes de fréquence double, triple, ou plus (ces composantes sont appelées des harmoniques de la fréquence fondamentale). La possibilité de génération de fréquences élevées par la création d'harmoniques est utilisée dans de multiples applications en physique.
Il sera précisé sur un exemple dans le chapitre III, comment l'analyse des harmoniques dans le signal de sortie d'un système peut servir à étudier le mécanisme physique responsable de la non-linéarité du système.

EXERCICES

I. Soit le système défini par l'équation différentielle : $y(t) = b_0 \dfrac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t)$. Montrer que ce système dont l'opérateur est noté O est linéaire, invariant par translation dans le temps.

Linéarité : On pose $y_1(t) = O\big(x_1(t)\big)$ et $y_2(t) = O\big(x_2(t)\big)$. Soit une combinaison linéaire de coefficients quelconques des grandeurs d'entrée : $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$.

Calcul de la grandeur de sortie $y(t) = O\big(x(t)\big)$.

$$y(t)=b_0\frac{d\left(c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\right)}{dt}+b_1\left(c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\right)$$

$$y(t)=b_0\frac{dc_1x_1(t)}{dt}+b_0\frac{dc_2x_2(t)}{dt}+b_1c_1x_1(t)+b_1c_2x_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t).$$

Cette dernière relation correspond à la définition de la linéarité du système O.

Invariance par translation dans le temps : On a $y(t)=O\left(x(t)\right)$. A quoi correspond $O\left(x(t-\tau)\right)$?

$$O\left(x(t-\tau)\right)=b_0\frac{dx(t-\tau)}{dt}+b_1x(t-\tau)=b_0\frac{dx(t')}{dt}+b_1x(t')$$ (On a posé $t'=t-\tau$).

On reconnaît dans le membre de droite $b_0\frac{dx(t')}{dt}+b_1x(t')=y(t')$, que l'on peut écrire $y(t-\tau)=b_0\frac{dx(t-\tau)}{dt}+b_1x(t-\tau)$ qui correspond à la définition de la stationnarité du système O.

II. Soit le système défini par l'équation : $y(t)=bx^2(t)$. Ce système est-il linéaire ? Invariant par translation dans le temps ?

Linéarité : On pose $y_1(t)=O\left(x_1(t)\right)$ et $y_2(t)=O\left(x_2(t)\right)$. Soit une combinaison linéaire de coefficients quelconques des grandeurs d'entrée : $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$.

Calcul de la grandeur de sortie $y(t)=O\left(x(t)\right)$.

$$y(t)=b\left(c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\right)^2=b\left(c_1^2x_1^2(t)+c_2^2x_2^2(t)+2c_1x_1(t)c_2x_2(t)\right)$$

$$y(t)=c_1^2y_1(t)+c_2^2y_2(t)+2bc_1c_2x_1(t)x_2(t)\neq c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$$ dans le cas général.

Le système n'est pas linéaire.

Invariance par translation dans le temps : On a $y(t)=O\left(x(t)\right)$. A quoi correspond $O\left(x(t-\tau)\right)$?

$O\left(x(t-\tau)\right)=bx^2(t-\tau)$. On reconnaît dans le membre de droite $y(t-\tau)$. Le système est IT.

III. Soit le système défini par l'équation : $y(t)=\cos t\ x(t)$. Ce système est-il linéaire ? Invariant par translation dans le temps ?

Linéarité : Opération du système sur la combinaison linéaire : soit $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$.

$y(t)=\cos t\left(c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\right)=c_1\cos tx_1(t)+c_2\cos tx_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$. Le système est linéaire.

Invariance par translation dans le temps : $O\left(x(t-\tau)\right)=\cos t\ x(t-\tau)$ qui est différent de $y(t-\tau)=\cos(t-\tau)\ x(t-\tau)$. Le système n'est pas invariant par translation dans le temps.

Ce résultat découle du fait que le coefficient multiplicateur du signal d'entrée $x(t)$ est une fonction du temps.

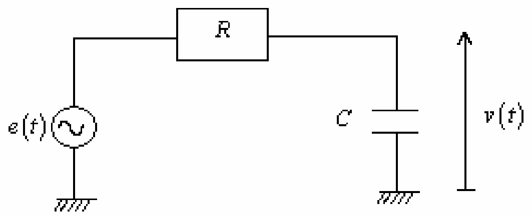
Chapitre II

SYSTEMES DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE

Dans ce chapitre, les propriétés de la fonction de transfert et de la réponse en fréquence de systèmes du premier et du second ordre sont étudiées sur quelques exemples tirés de l'électricité. Une interprétation géométrique basée sur la localisation des pôles de la fonction de transfert dans le plan complexe permet d'interpréter qualitativement le comportement de la variation avec la fréquence de la réponse en fréquence. Cette interprétation géométrique est aisément généralisable aux situations d'un nombre quelconque de zéros et pôles de la fonction de transfert. Elle s'avère précieuse dans la compréhension du comportement général des filtres. L'étude débute par le système le plus simple : le système du premier ordre.

1. Système du premier ordre. Le circuit *R, C*

Soit le circuit électrique composé d'une résistance et d'un condensateur placés en série. Le circuit est alimenté par un générateur sans résistance interne, de force électromotrice $e(t)$. La charge sur une armature du condensateur est notée q, et la tension aux bornes du condensateur $v(t)$.



La loi d'Ohm généralisée s'écrit :

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=e(t) \qquad \text{(II,1)}$$

Du point de vue système, on prend $e(t)$ comme grandeur d'entrée et $v(t)$ comme grandeur de sortie.

1.1 Fonction de transfert

On peut écrire cette équation sous la forme d'un opérateur agissant sur q :

$$\left(R\frac{d}{dt}+\frac{1}{C}\right)q=e(t) \qquad \text{(II,2)}$$

Ce système est linéaire et invariant par translation dans le temps. D'après le résultat fondamental démontré dans le chapitre I, si $e(t)$ a la forme e^{pt}, la charge sur une armature du condensateur $q(t)$ et la tension à ses bornes $v(t)$ auront la même forme exponentielle. Ceci peut être vérifié :

En posant $e(t)=e^{pt}$ et en cherchant $q(t)$ sous la forme : $q(t)=Be^{pt}$

En reportant son expression dans l'équation (II,2) on a :