Dany-Jack Mercier
Jean-Étienne Rombaldi

Annales 2013-A
CAPES et CAPLP de Mathématiques

3 problèmes corrigés

Publibook

Retrouvez notre catalogue sur le site des Éditions Publibook :

http://www.publibook.com

Éditions Publibook
14, rue des Volontaires
75015 PARIS – France
Tél. : +33 (0)1 53 69 65 55

IDDN.FR.010.0118351.000.R.P.2013.030.31500

Cet ouvrage a fait l'objet d'une première publication aux Éditions Publibook en 2013

Table des matières

Avant-propos

L'année 2013 est l'année de tous les CAPES : la session 2013 a débuté avec les deux écrits des 15 et 16 novembre 2012 que l'on trouvera sur ce fascicule à côté de l'énoncé du CAPLP de maths - sciences physiques proposé une semaine plus tard.

Puis il aura l'agrégation interne en janvier 2013, les épreuves du CAPES agricole organisées par le Ministère de l'agriculture courant février 2013, et une session 2013 supplémentaire du CAPES externe en juin 2013.

C'est donc le moment de passer le CAPES : le nombre de postes augmente (1210 postes pour la session 2013 de novembre 2012, plus 105 postes pour le CAFEP et 45 postes pour le troisième concours du public et du privé), les candidats ne sont pas pléthores depuis l'obligation de détenir un master au lieu d'une licence, et les problèmes proposés aux écrits deviennent plus simples et encore plus progressifs, s'attachant essentiellement à vérifier que le candidat possède un bagage minimum dont il sait se servir.

Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas s'entraîner sérieusement avant les épreuves. Les postes ne seront pourvus que si le jury estime que suffisamment de candidats ont des connaissances suffisantes, et il faut donc travailler le cours, réviser les fondamentaux, et réserver du temps à l'entraînement sur des exercices classiques et des annales corrigées.

On trouvera ici trois problèmes corrigés avec soin sur lesquels on pourra s'entraîner avec profit si l'on présente bientôt le CAPES externe, le CAPLP ou l'agrégation interne.

Le plus tôt sera la mieux. C'est le moment ! En avant !

Dany-Jack Mercier[1],
Pointe-à-Pitre, le 2 décembre 2012 .

[0] [annales2013a] v1.00

[1] dany-jack.mercier@hotmail.fr

Chapitre 1

CAPES externe (nov. 2013), épreuve 1

1.1 Énoncé

PROBLEME 1 - NOMBRES IRRATIONNELS

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme p/q, où p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels. Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

– A – Quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n!$. On se propose de démontrer que le nombre e est irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls tels que $e = p/q$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction. Pour tout entier naturel n, on

pose[1] :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

(a) Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, puis montrer que $u_q < e < v_q$.

(b) Aboutir à une contradiction en multipliant les deux termes de cet encadrement par $q! \times q$.

– B – Une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = a/b$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Étant donnés un entier naturel non nul n et un réel x, on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \text{ et } P_0(x) = 1.$$

Étant donné un entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin(x)\, dx.$$

1.

(a) Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}.

(b) Calculer $\sup_{x\in[0,\pi]} |P_n(x)|$ en fonction de a, b et n.

(c) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x).$$

(d) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0.$$

(e) Après avoir justifié que la suite de terme général $\frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

[1] v_0 n'étant pas défini, on pose $v_0 = 4 > v_1 = 3$

2. Pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition $P_n^{(0)} = P_n$. En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ sont des entiers relatifs :

   (a) $0 \leq k \leq n-1$.

   (b) $n \leq k \leq 2n$.

   (c) $k \geq 2n+1$.

   Pour le cas 2b, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

   (b) Conclure quant à l'hypothèse $\pi = a/b$.

– C – Développement en série de Engel et applications

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geq 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \ldots a_k}$$

   est convergente de limite inférieure ou égale à $\dfrac{1}{a_0 - 1}$.

   Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que x admet un développement en série de Engel. On notera $x = [a_0, \cdots, a_n, \cdots]$.

2. Soit $x \in \left]0,1\right]$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right) \text{ et } x_{n+1} = a_n x_n - 1.$$

   où E désigne la fonction partie entière.

   (a) Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

   (b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geq 2$.

(d) En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \ldots a_n}.$$

En déduire que x admet un développement en série de Engel.

3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geq 2$, $b_0 \geq 2$ et :

$$[a_0, \cdots, a_n, \cdots] = [b_0, \cdots, b_n, \cdots].$$

On pose $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$.

(a) Démontrer que $[a_{n_0}, \cdots, a_n, \cdots] = [b_{n_0}, \cdots, b_n, \cdots]$.

(b) Démontrer que si $x = [\alpha_0, \cdots, \alpha_n, \cdots]$ alors $\alpha_0 x - 1 \leq x$ et en déduire que $\alpha_0 = 1 + E(1/x)$.

(c) En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0,1]$.

4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :

(a) Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à c ($c \geq 2$).

(b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n + 2.$$

(c) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (2n+1)(2n+2).$$

5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}\right) - 2$.

6. Démontrer que $x \in]0,1]$ est rationnel si, et seulement si, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire. Pour le sens direct[2], on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de x par son numérateur.

[2] C'est-à-dire la condition nécessaire, en langage mathématique.

PROBLEME 2 - STATISTIQUES ET PROBABILITES

– Partie A – Deux indicateurs de dispersion

En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes, choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la « vraie position » et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $(x_1, \cdots, x_n)$ un n-uplet de réels. On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \quad \text{et} \quad L(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|.$$

1. **Minimisation de** G.

1.1. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.

1.2. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1.1 ?

2. **Minimisation de** L

On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

2.1. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où $n = 3$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

2.2. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où $n = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 7$.

2.3. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint. *On distinguera les cas n pair et n impair.*

2.4. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 2.3 ?

Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit prévu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.

– Partie B – Théorie de l'information, le cas discret

La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Étant donné un entier naturel non nul n, on considère un système complet d'événements $A = \{A_1, \cdots, A_n\}$ de probabilités respectives $(p_1, \cdots, p_n)$ toutes non nulles. On définit l'**entropie** de ce système par le nombre :

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

1. **Deux exemples**

On se place ici dans le cas $n = 4$. Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note A_i l'événement : *le cheval numéro i remporte la course.* Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.

1.1. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$.

1.2. $p_1 = \frac{1}{8}$, $p_2 = \frac{1}{8}$, $p_3 = \frac{1}{4}$, $p_4 = \frac{1}{2}$.

On va à présent établir la propriété générale suivante : l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.

2. **Cas $n = 2$**

On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$. On pose $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$. Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux événements A_1 et A_2 sont équiprobables.