

<b>XI – Intégration et Transformation de Fourier</b> .....	1
§ 1. <i>L'intégrale supérieure d'une fonction positive</i> .....	6
1 – Intégrale d'une fonction sci .....	6
(i) Mesures positives .....	6
(ii) Le théorème de Dini .....	7
(iii) Intégrale d'une fonction sci .....	9
2 – Intégrale supérieure d'une fonction positive. Ensembles négligeables, ensembles raisonnables .....	12
(i) Intégrales supérieures .....	12
(ii) Ensembles négligeables .....	15
(iii) Ensembles et fonctions raisonnables .....	16
3 – Les espaces $F^p$ .....	17
(i) Définition des espaces $F^p$ .....	17
(ii) Convergence en moyenne et presque partout .....	19
§ 2. <i>Les espaces <math>L^p</math></i> .....	22
4 – Fonctions intégrables, espaces $L^p$ .....	22
(i) Intégrale d'une fonction intégrable .....	22
(ii) Les espaces $L^p$ ; théorème de Riesz-Fischer .....	25
(iii) Cas des fonctions sci ou scs .....	29
5 – Les théorèmes de Lebesgue .....	30
(i) Le théorème de convergence dominée .....	30
(ii) Relation entre $L^p$ et $L^1$ ; inégalité de Hölder .....	33
(iii) Applications à la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}$ .....	37
§ 3. <i>Ensembles et fonctions mesurables</i> .....	40
6 – Ensembles intégrables et mesurables .....	40
(i) Propriétés des ensembles intégrables .....	40
(ii) Ensembles mesurables .....	42

7 – Fonctions mesurables .....	44
(i) Espaces séparables .....	44
(ii) Applications mesurables .....	46
8 – Mesurabilité et continuité .....	49
(i) Les théorèmes d'Egoroff et de Lusin .....	49
(ii) Fonctions mesurables au sens de Lusin .....	53
9 – Mesurabilité et intégrabilité .....	55
§ 4. Du côté de chez Lebesgue-Fubini .....	57
10 – Le théorème de Lebesgue-Fubini (LF) .....	57
(i) Produit de mesures .....	57
(ii) Le théorème de Lebesgue-Fubini .....	58
(iii) Compléments au théorème de LF .....	62
(iv) La formule d'inversion de Fourier .....	65
11 – Intermède topologique: espaces polonais .....	66
(i) Espaces polonais .....	66
(ii) Fonctions sci sur un espace localement compact polonais ...	72
(iii) Ensembles boréliens dans un espace polonais .....	73
12 – Sommes continues de mesures: exemples .....	75
(i) Mesures produit .....	75
(ii) Mesure définie par une densité localement intégrable .....	76
(iii) Image d'une mesure par une application .....	76
(iv) Quotient d'une mesure invariante .....	78
13 – Fonctions intégrables pour une somme continue .....	79
(i) Cas des fonctions sci .....	79
(ii) Le théorème de Lebesgue-Fubini généralisé .....	82
14 – Fonctions intégrables pour l'image d'une mesure .....	85
15 – Mesures invariantes par un groupe .....	90
(i) Mesures invariantes sur un groupe .....	90
(ii) Représentations linéaires continues .....	92
(iii) Quotient d'un espace par un groupe .....	96
(iv) Quotient d'une mesure invariante .....	98
(v) Un exemple: le groupe orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ .....	101
(vi) Cas des espaces homogènes .....	103
(vii) Cas des groupes discrets .....	105

§ 5. Le théorème de Lebesgue-Nikodym .....	110
16 – Mesures de base $\lambda$ : fonctions intégrables .....	110
17 – Le théorème de Lebesgue-Nikodym (LN) .....	114
(i) Caractérisation des mesures absolument continues .....	114
(ii) Application aux mesures complexes .....	116
(iii) La décomposition de Lebesgue .....	119
18 – Formes linéaires continues sur $L^p$ . L'espace $L^\infty$ .....	121
§ 6. Décompositions spectrales dans un espace de Hilbert .....	125
19 – Opérateurs dans un espace de Hilbert .....	125
(i) Définitions, formes linéaires continues .....	125
(ii) Bases orthonormales .....	128
(iii) Adjoint, opérateurs hermitiens .....	129
(iv) Spectre d'un opérateur hermitien .....	131
(v) Topologie faible .....	133
(vi) Opérateurs de Hilbert-Schmidt .....	135
(vii) Algèbres de von Neumann .....	137
20 – Les théorèmes de Gelfand sur les algèbres normées .....	141
21 – Une caractérisation des algèbres de fonctions continues .....	148
22 – Décompositions spectrales .....	150
(i) L'algèbre de GN d'un opérateur normal .....	150
(ii) Mesure spectrale d'une algèbre d'opérateurs .....	152
(iii) Intégration par rapport à une mesure spectrale .....	154
(iv) Décomposition spectrale d'un opérateur normal .....	159
23 – Opérateurs autoadjoints .....	160
(i) Inverse d'un opérateur hermitien injectif .....	160
(ii) Prolongement canonique d'un opérateur symétrique positif .....	164
24 – Décompositions en sommes continues .....	169
(i) Vecteurs propres virtuels .....	169
(ii) Sommes continues d'espaces de Hilbert .....	175
(iii) L'espace $L^2$ d'une intégrale de mesures .....	177
§ 7. La transformation de Fourier commutative .....	181
25 – Produit de convolution dans un glc .....	181
(i) Convolution et représentations .....	181
(ii) Convolution de deux mesures .....	183

(iii)	Convolution d'une mesure et d'une fonction .....	185
(iv)	Convolution de deux fonctions .....	189
(v)	Suites de Dirac .....	191
26	– La transformation de Fourier dans $L^1(G)$ .....	193
(i)	Caractères d'un glc commutatif .....	193
(ii)	La topologie du groupe dual .....	195
(iii)	L'homomorphisme canonique $G \rightarrow \hat{G}$ .....	198
27	– La transformation de Fourier dans $L^2(G)$ .....	199
(i)	L'algèbre $\mathbf{A}(G)$ et ses caractères .....	199
(ii)	Décomposition spectrale de la représentation régulière ....	202
(iii)	La mesure invariante du dual .....	204
(iv)	Formule d'inversion de Fourier et bidualité .....	209
§ 8.	<i>Représentations unitaires des groupes localement compacts</i> .....	211
28	– Compléments sur les représentations .....	211
29	– La transformation de Fourier dans un groupe compact .....	214
(i)	Représentations irréductibles d'un groupe central .....	214
(ii)	Fonctions centrales sur un groupe compact .....	216
(iii)	Décomposition spectrale de $\mathbf{Z}(G)$ .....	221
(iv)	Caractères de $\mathbf{Z}(G)$ et représentations irréductibles .....	224
(v)	Faciles généralisations .....	228
30	– Mesures et fonctions de type positif .....	232
(i)	Mesures de type positif .....	232
(ii)	Cas d'un groupe commutatif .....	233
(iii)	Fonctions de type positif .....	235
31	– Représentations quasi-régulières d'un groupe unimodulaire .....	241
(i)	Mesures centrales de type positif .....	241
(ii)	Le théorème de commutation .....	244
(iii)	Traces dans une algèbre hilbertienne .....	250
(iv)	Cas d'un groupe commutatif .....	255
(v)	Caractères d'un groupe localement compact .....	256
(vi)	Caractères de classe (I) .....	258
32	– Composantes discrètes de la représentation régulière .....	261

<b>XII – Le jardin des délices modulaires ou, l'opium des mathématiciens</b> .....	271
§1. <i>Séries et produits infinis de la théorie des nombres</i> .....	271
1 – La transformée de Mellin d'une transformée de Fourier .....	271
2 – L'équation fonctionnelle de la fonction $\zeta$ .....	277
3 – La méthode de Weil pour la fonction $\eta(z)$ .....	284
§2. <i>Les séries <math>\sum 1/\cos \pi n z</math> et <math>\sum \exp(\pi i n^2 z)</math></i> .....	293
4 – La série $\sum 1/\cos \pi n z$ .....	293
5 – L'identité $\sum 1/\cos \pi n z = \theta(z)^2$ .....	296
(i) Le domaine fondamental de $\Gamma(\theta)$ .....	296
(ii) Une méthode générale .....	298
(iii) L'identité $f(z)/\theta(z)^2 = 1$ .....	299
6 – Le produit infini de la fonction $\theta(u, z)$ .....	301
7 – La loi de réciprocité des sommes de Gauss .....	305
(i) La méthode de Cauchy .....	305
(ii) La méthode de Dirichlet .....	308
(iii) La loi de réciprocité quadratique .....	310
§3. <i>Les séries <math>L(s; \chi)</math> de Dirichlet</i> .....	314
8 – L'équation fonctionnelle de $\eta(z)$ : bis .....	314
9 – Intermède arithmétique .....	315
(i) Anneaux quotients .....	315
(ii) Les groupes $G(m)$ ; caractères mod $m$ .....	318
(iii) Relations d'orthogonalité .....	322
(iv) Sommes de Gauss .....	323
(v) Cas du caractère unité .....	326
10 – Les séries $\theta_f(x; \chi)$ et $L(s; \chi)$ .....	330
(i) Equation fonctionnelle de $\theta_f(x; \chi)$ .....	330
(ii) Les séries $L(s, \chi)$ .....	331
§4. <i>Fonctions elliptiques</i> .....	337
11 – Les théorèmes de Liouville .....	337
12 – Fonctions elliptiques et séries thêta .....	339
(i) Le théorème d'Abel .....	339
(ii) Fonctions thêta générales .....	343
(iii) Les métamorphoses de la série de Jacobi .....	345

13 – Le point de vue d'Eisenstein et de Weierstrass .....	350
(i) Convergence des séries d'Eisenstein .....	350
(ii) La fonction $\wp$ de Weierstrass .....	353
(iii) Les séries $\sum \pi^2 / \sin^2 \pi(u + nz)$ et $G_2(z)$ .....	358
(iv) Relation entre les fonctions $\wp$ et $\theta_1$ .....	360
(v) Fonctions elliptiques ayant des pôles simples donnés .....	363
(vi) Les fonctions $\zeta_L$ et $\sigma_L$ .....	366
14 – Intégrales elliptiques .....	367
(i) Le corps des fonctions elliptiques .....	367
(ii) La surface de Riemann du corps des fonctions elliptiques .....	369
(iii) Formule d'addition .....	372
§ 5. $SL_2(\mathbb{R})$ comme groupe localement compact .....	377
15 – Sous-groupes, mesure invariante .....	377
(i) Opérations de $SL_2(\mathbb{R})$ dans le demi-plan .....	377
(ii) Les formes automorphes comme fonctions sur $G$ .....	378
(iii) Sous-groupes de $SL_2$ .....	382
(iv) Points fixes et valeurs propres .....	385
(v) Mesure invariante .....	385
(vi) Le point de vue du disque unité .....	388
16 – La série discrète de représentations de $SL_2(\mathbb{R})$ .....	390
(i) Fonctions holomorphes intégrables dans le demi-plan .....	391
(ii) Les espaces $\mathcal{H}_r^p$ du disque unité .....	395
(iii) Un théorème de type Paley-Wiener pour $\mathcal{H}_r^2(P)$ .....	398
(iv) La fonction noyau de $\mathcal{H}_r^2(P)$ .....	401
(v) La série discrète holomorphe de représentations irréductibles de $SL_2(\mathbb{R})$ .....	403
(vi) Les solutions de l'équation $f * \omega_r = f$ .....	406
§ 6. Fonctions modulaires : la théorie classique .....	411
17 – Domaine fondamental, formes modulaires .....	411
(i) Générateurs du groupe modulaire .....	411
(ii) Domaine fondamental .....	412
(iii) Définition classique des formes modulaires .....	414
(iv) Séries d'Eisenstein et de Poincaré .....	416
18 – Les analogues des deux théorèmes de Liouville .....	422
(i) La surface de Riemann de $SL_2(\mathbb{Z})$ .....	422
(ii) Zéros et pôles .....	426

(v)	L'algèbre de Lie d'un groupe .....	528
(vi)	Algèbres de Lie des groupes classiques .....	530
(vii)	Distributions et opérateurs différentiels invariants .....	531
26	- L'algèbre de Lie en dimension infinie .....	537
(i)	Le sous-espace $\mathcal{H}^\infty$ .....	537
(ii)	Différentiabilité faible et différentiabilité forte .....	539
(iii)	Opérateurs de convolution dans $\mathcal{H}^\infty$ .....	542
(iv)	Le théorème de Dixmier et Malliavin .....	544
(v)	Vecteurs analytiques .....	546
(vi)	Cas des représentations unitaires .....	549
27	- Opérateurs différentiels dans $SL_2(\mathbb{R})$ .....	552
(i)	L'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{R})$ .....	552
(ii)	Opérateurs différentiels dans le demi-plan .....	555
28	- La représentation de $\mathfrak{g}$ associée à une fonction holomorphe .....	559
(i)	Le $\mathfrak{g}$ -module $HC_r(f) = HC(f_r)$ .....	559
(ii)	Cas $r = -p \leq 0$ .....	561
(iii)	$\mathfrak{g}$ -modules simples de dimension finie .....	562
(iv)	Condition pour que $\dim HC_r(f) < +\infty$ .....	563
(v)	Un théorème de Maaß .....	564
29	- Représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ .....	565
(i)	Classification .....	565
(ii)	Modèles fonctionnels des représentations de $\mathfrak{g}$ .....	567
30	- Représentations irréductibles de $G$ .....	570
(i)	Le théorème de multiplicité un .....	570
(ii)	Modèles fonctionnels pour $G$ : série discrète .....	572
(iii)	Modèles fonctionnels pour $G$ : série principale paire .....	574
<b>Index</b>	.....	<b>580</b>
<b>Table des matières du volume I</b>	.....	<b>587</b>
<b>Table des matières du volume II</b>	.....	<b>591</b>
<b>Table des matières du volume III</b>	.....	<b>595</b>