

I. Le théorème taubérien de Littlewood

1. Introduction	1
2. État des lieux en 1911	4
3. Analyse de l'article de Littlewood de 1911	7
3.1. L'exemple non-trivial	7
3.3. Le tour de force du papier	11
3.6. Optimalité de la condition taubérienne $a_n = O(n^{-1})$	14
3.13. Un programme de travail et de collaboration	21
4. Appendice sur les séries entières	24
5. Exercices	28

II. Le théorème taubérien de Wiener

1. Introduction	35
2. Rappels sur la transformée de Fourier	38
3. La preuve de Wiener	40
3.1. Les idées de la preuve du théorème d'approximation	40
3.4. Compléments sur la transformée de Fourier	43
3.7. Séries de Fourier absolument convergentes	46
3.14. Fin de la preuve du théorème d'approximation	51
4. Application au théorème de Littlewood	52
4.1. Le théorème taubérien de Pitt	52
4.3. Procédés de sommation	53
5. Preuve de Newman du lemme de Wiener	56
6. Preuve du théorème de Wiener par la théorie de Gelfand	57
6.1. Adjonction d'une unité à $L^1(\mathbb{R})$	57
6.4. La preuve algébrique	59
7. Exercices	60

III. Le théorème taubérien de Newman

1. Introduction	67
2. Le lemme de Newman	68
3. Le théorème taubérien de Newman	72
4. Applications	76
4.9. Première preuve du TNP	84
4.10. Deuxième preuve du TNP	84
5. Les théorèmes de Ikehara et Delange	86
6. Exercices	92

IV. Propriétés génériques des fonctions dérivées

1. Mesure et catégorie	96
1.1. Mesure	96
1.2. Catégorie	96
2. Fonctions de première classe de Baire	97
2.1. Points de discontinuité d'une fonction	97
2.4. Cas des fonctions de première classe	97
3. Ensembles des points de discontinuité des dérivées	99
3.1. Caractérisation de l'ensemble des points de discontinuité d'une dérivée	99
3.5. Discontinuité presque partout de la dérivée bornée générique	101
4. Fonctions dérivables nulle part monotones	103
4.1. Les fonctions de type Pompeiu	104
4.5. Fonctions dérivables et nulle part monotones	106
5. Exercices	108

V. Probabilités et théorèmes d'existence

1. Introduction	113
2. Inégalités de Khintchine et applications	114
2.4. Première preuve par compacité	117
2.5. Deuxième preuve par les probabilités	119
2.6. Preuve du point 2) du théorème V-2.3	120
3. Sous-espaces hilbertiens de $L^1([0, 1])$	124
4. Concentration des lois binomiales et applications	126
5. Exercices	124

VI. Les paradoxes de Hausdorff-Banach-Tarski

1. Introduction	139
2. Moyennes	142
2.1. Interprétation en termes de formes linéaires	143
2.6. Groupes moyennables	145
2.17. Le problème du prolongement exhaustif de la mesure de Lebesgue	149
3. Paradoxes	152
3.3. Le paradoxe de la sphère	154
3.15. Le paradoxe de Banach-Tarski dans \mathbb{R}^3	160
4. Supermoyennabilité	163
5. Appendice sur les espaces vectoriels topologiques	166
6. Exercices	167

VII. L'autre fonction de Riemann

1. Introduction	171
2. Non-dérivabilité de la fonction de Riemann en 0	173
3. La méthode d'Itatsu	174
3.5. Lien entre F et la fonction θ_0 de Jacobi	176
3.7. Application à une estimation de F au voisinage de 0	178
3.9. Autres points rationnels	179
4. Non-différentiabilité en les irrationnels	180
4.3. Premier ingrédient	185
4.5. Deuxième ingrédient	186
4.11. Rappels succincts sur les développements en fractions conti- nuées	192
4.12. Troisième ingrédient	194
4.14. Fin de la preuve du théorème de Hardy et Littlewood	196
5. Exercices	199

VIII. L'équation fonctionnelle approchée de θ_0

1. L'équation fonctionnelle approchée	208
2. Autres formes de l'équation fonctionnelle approchée.	214
2.1. Compléments sur les fractions continuées	215
2.4. Forme maniable de l'équation fonctionnelle approchée	217
2.8. Estimations en norme uniforme	220
2.12. Estimations en norme L^1	222
3. Exercices	225

IX. La conjecture de Littlewood

1. Introduction	231
2. Propriétés de la norme L^1 et conjecture de Littlewood	237
3. Solution de la conjecture de Littlewood	242
4. Extension au cas de fréquences réelles	250
5. Exercices	261

X. Généralités sur les algèbres de Banach

1. Spectre d'un élément dans une algèbre de Banach	268
1.1. Définition, premières propriétés	269
1.5. Passage à une sous-algèbre fermée	271
2. Caractères d'une algèbre de Banach	271
2.1. Idéaux maximaux	272
2.3. Correspondance entre idéaux maximaux et caractères	272
2.8. Topologie sur le spectre	274
2.11. Transformée de Gelfand	275
3. Exemples	276
3.1. Fonctions continues sur un espace compact	276
3.4. L'algèbre du disque	277
3.7. L'algèbre de Wiener	278
3.11. L'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	280
4. C^* -algèbres	280
4.5. Propriétés de base	281
4.11. Invariance du spectre	282
4.13. Théorème de représentation de Gelfand-Naimark	282
4.15. Application aux éléments normaux de A	283
5. Exercices	284

XI. Le théorème de la couronne de Carleson

1. Introduction	291
2. Les prérequis	296
2.1. Les opérateurs de dérivation	296
2.2. La formule de Stokes	297
2.6. Résolution du \bar{d} -barre	300
2.7. Les produits de Blaschke	301
2.8. Les espaces de Hardy	302
2.12. Dualité dans les espaces de Banach	303
3. Solution du problème de la couronne	304
3.1. Aspect algébrique	305
3.2. Aspect analytique	307
3.2.1. Estimation de $\int_D F' \varphi d\lambda_1$	309
3.3.1. Estimation de $\int_D F \bar{\partial} \varphi d\lambda_1$	310
3.5. Vers une version « sans dimension » du théorème de la couronne	311

4. La preuve initiale de Carleson et les mesures de Carleson	320
5. Prolongements du théorème de la couronne	325
6. Exercices	329

XII. Le problème de la complémentation...

1. Introduction	335
2. Le problème de la complémentation	337
3. Solution du problème 9	342
4. Le théorème de Kadeč-Snobar	344
5. Un exemple « à la Liouville »	348
6. Un exemple « à la Hermite »	351
7. Développements plus récents	355
8. Exercices	358

XIII. Indications de solutions

Exercices du chapitre I	365
Exercices du chapitre II	367
Exercices du chapitre III	369
Exercices du chapitre IV	370
Exercices du chapitre V	374
Exercices du chapitre VI	375
Exercices du chapitre VII	378
Exercices du chapitre VIII	380
Exercices du chapitre IX	382
Exercices du chapitre X	384
Exercices du chapitre XI	386
Exercices du chapitre XII	389

Bibliographie 393

Notations 403

Index 407