

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>21</b>
1.1	Introduction . . . . .	21
1.2	Définitions . . . . .	24
1.2.1	Espace préhilbertien réel . . . . .	24
1.2.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	28
1.2.3	Inégalité de Minkowski . . . . .	30
1.2.4	Normes . . . . .	31
1.2.5	Distance . . . . .	36
1.2.6	Distance associée à une norme . . . . .	37
1.2.7	Distance d'un point à une partie d'un espace vectoriel normé . . . . .	37
1.2.8	Produit d'espaces vectoriels normés . . . . .	38
1.2.9	Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé . . . . .	39
1.3	Topologie dans un espace vectoriel normé . . . . .	41
1.3.1	Boule ouverte, boule fermée, sphère . . . . .	41
1.3.2	Normes équivalentes . . . . .	42
1.3.3	Voisinage . . . . .	47
1.3.4	Ouvert, fermé . . . . .	49
1.3.5	Intérieur, adhérence et frontière . . . . .	55
1.3.6	Point adhérent et limite . . . . .	59
1.3.7	Point adhérent et distance . . . . .	61
1.3.8	Partie dense . . . . .	61
1.4	Limites . . . . .	63

1.4.1	Définitions . . . . .	63
1.4.2	Limites et suites . . . . .	65
1.4.3	Opérations sur les limites . . . . .	66
1.4.4	Limite dans un espace vectoriel normé produit . . . . .	67
1.5	Continuité . . . . .	69
1.5.1	Définition . . . . .	69
1.5.2	Opérations sur les applications continues . . . . .	70
1.5.3	Continuité et suites . . . . .	71
1.5.4	Continuité et topologie . . . . .	71
1.5.5	Continuité et partie dense . . . . .	74
1.6	Continuité uniforme et applications lipschitziennes . . . . .	75
1.6.1	Continuité uniforme . . . . .	75
1.6.2	Applications lipschitziennes . . . . .	77
1.7	Continuité des applications linéaires . . . . .	82
1.7.1	Caractérisation des applications linéaires continues . . . . .	82
1.7.2	Exemples . . . . .	85
1.8	Continuité des applications bilinéaires et multilinéaires . . . . .	86
1.8.1	Caractérisation des applications multilinéaires continues . . . . .	86
1.8.2	Exemples . . . . .	88
1.9	Compacité . . . . .	89
1.9.1	Suite extraite et valeurs d'adhérence . . . . .	89
1.9.2	Partie compacte d'un espace vectoriel normé . . . . .	91
1.9.3	Produit fini de compacts . . . . .	92
1.9.4	Suites de points d'un compact . . . . .	93
1.9.5	Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	94
1.9.6	Applications continues sur un compact . . . . .	95
1.9.7	Théorème de Tychonoff . . . . .	98
1.9.8	Théorème de Heine . . . . .	100
1.10	Connexité par arcs . . . . .	101
1.10.1	Définitions . . . . .	101
1.10.2	Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ . . . . .	104
1.10.3	Partie connexe par arcs et application continue . . . . .	105
1.10.4	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	106
1.11	Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	106

1.11.1	Équivalence des normes . . . . .	106
1.11.2	Continuité des applications linéaires . . . . .	108
1.11.3	Continuité des applications multilinéaires . . . . .	110
1.11.4	Parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie . . . . .	111
1.11.5	Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	112
1.12	Compléments . . . . .	113
1.12.1	Inégalités de Hölder et de Minkowski . . . . .	113
1.12.2	Complétude . . . . .	118
1.12.3	Théorème du point fixe . . . . .	124
1.12.4	Théorème de Riesz . . . . .	126
1.13	Exercices corrigés . . . . .	131
<b>2</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>139</b>
2.1	Introduction . . . . .	139
2.1.1	Un paradoxe de Zénon . . . . .	139
2.1.2	Le paradoxe des morceaux de sucre . . . . .	140
2.2	Définitions . . . . .	143
2.2.1	Convergence et divergence . . . . .	143
2.2.2	Somme et reste d'une série convergente . . . . .	145
2.2.3	Condition nécessaire de convergence . . . . .	147
2.3	Séries à termes positifs . . . . .	148
2.3.1	Premiers critères . . . . .	148
2.3.2	Lemme de condensation de Cauchy . . . . .	150
2.3.3	Séries de Riemann . . . . .	152
2.3.4	Critères de comparaison . . . . .	154
2.3.5	Règle de Riemann . . . . .	156
2.3.6	Règle de Riemann généralisée . . . . .	157
2.3.7	Séries de Bertrand . . . . .	158
2.3.8	Critère de comparaison logarithmique . . . . .	161
2.3.9	Règle de d'Alembert . . . . .	162
2.3.10	Règle de Cauchy . . . . .	165
2.3.11	Comparaison des règles de Cauchy et de d'Alembert . . . . .	166
2.3.12	Règles de Raabe et Duhamel . . . . .	172
2.4	Séries à termes quelconques . . . . .	176

3.5	Critères complémentaires . . . . .	269
3.5.1	Intégration par parties . . . . .	269
3.5.2	Changement de variable . . . . .	270
3.5.3	Intégrales de Bertrand . . . . .	271
3.5.4	Convergence absolue . . . . .	275
3.5.5	Intégration des relations de comparaison . . . . .	278
3.5.6	Généralisation des intégrales de Bertrand . . . . .	283
3.5.7	Comportement asymptotique . . . . .	285
3.5.8	Règle d'Abel . . . . .	289
3.5.9	Théorème dû à Ermakoff . . . . .	291
3.6	Intégrales définies dépendant d'un paramètre . . . . .	293
3.6.1	Continuité . . . . .	294
3.6.2	Dérivabilité : théorème dû à Leibniz . . . . .	295
3.6.3	Intégrabilité : théorème de Fubini . . . . .	297
3.7	Intégrales impropres dépendant d'un paramètre . . . . .	300
3.7.1	Continuité . . . . .	300
3.7.2	Dérivabilité . . . . .	303
3.7.3	Intégrabilité : théorèmes de Fubini . . . . .	306
3.8	Quelques intégrales célèbres . . . . .	311
3.8.1	Intégrales d'Euler . . . . .	311
3.8.2	Intégrales de Lejeune-Dirichlet . . . . .	316
3.8.3	Intégrale de Gauss . . . . .	322
3.8.4	Intégrales de Fresnel . . . . .	325
3.9	Exercices corrigés . . . . .	335
	<b>Suites de fonctions</b> . . . . .	<b>349</b>
4.1	Introduction . . . . .	349
4.2	Définitions . . . . .	351
4.2.1	Suite de fonctions . . . . .	351
4.2.2	Convergence simple . . . . .	352
4.2.3	Convergence uniforme . . . . .	356
4.3	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	361
4.3.1	La convergence uniforme implique la convergence simple . . . . .	361
4.3.2	Convergence uniforme et opérations . . . . .	362

4.3.3	Convergence uniforme et continuité . . . . .	365
4.3.4	Convergence uniforme et limite . . . . .	368
4.3.5	Convergence uniforme et intégrales définies . . . . .	371
4.3.6	Convergence uniforme et dérivées . . . . .	372
4.3.7	Convergence uniforme et intégrales impropres . . . . .	377
4.3.8	Théorèmes de Dini . . . . .	381
4.4	Approximation des fonctions continues . . . . .	386
4.4.1	Polynômes de Bernstein . . . . .	386
4.4.2	Courbes de Bézier . . . . .	387
4.4.3	Approximation uniforme des fonctions continues . . . . .	389
4.4.4	Approximation uniforme des fonctions continues et périodiques . .	394
4.4.5	Un raffinement du théorème de Weierstrass . . . . .	400
4.5	Exercices corrigés . . . . .	404
<b>5</b>	<b>Séries de fonctions</b> . . . . .	<b>415</b>
5.1	Introduction . . . . .	415
5.1.1	Décomposition d'un signal en série de Fourier . . . . .	415
5.1.2	Vibrations d'une corde . . . . .	416
5.2	Convergences . . . . .	420
5.2.1	Définition d'une série de fonctions . . . . .	420
5.2.2	Convergence simple . . . . .	421
5.2.3	Convergence uniforme . . . . .	422
5.2.4	Convergence normale . . . . .	427
5.2.5	Convergence absolue . . . . .	428
5.2.6	Liens entre les différents types de convergence . . . . .	429
5.3	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	432
5.3.1	Convergence uniforme et continuité . . . . .	432
5.3.2	Convergence uniforme et limite . . . . .	434
5.3.3	Convergence uniforme et intégrales définies . . . . .	435
5.3.4	Convergence uniforme et dérivées . . . . .	436
5.4	Théorème de convergence dominée de Lebesgue . . . . .	437
5.4.1	Théorème d'intégration terme à terme . . . . .	437
5.4.2	Théorème de convergence dominée . . . . .	440
5.5	Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part . . . . .	446

5.6	Exercices corrigés . . . . .	450
<b>6</b>	<b>Séries entières</b>	<b>467</b>
6.1	Introduction . . . . .	467
6.2	Rayon de convergence . . . . .	469
6.2.1	Convergence d'une suite ou d'une série complexe . . . . .	469
6.2.2	Définition d'une série entière . . . . .	471
6.2.3	Lemme d'Abel . . . . .	472
6.2.4	Définition du rayon de convergence . . . . .	473
6.2.5	Disque ouvert de convergence . . . . .	475
6.2.6	Règles de d'Alembert et de Cauchy . . . . .	479
6.3	Opérations sur les séries entières . . . . .	482
6.3.1	Somme . . . . .	482
6.3.2	Produit par un scalaire . . . . .	483
6.3.3	Produit de Cauchy . . . . .	484
6.3.4	Théorème de comparaison . . . . .	486
6.3.5	Dérivée et primitive d'une série entière . . . . .	487
6.4	Propriétés de la fonction somme d'une série entière . . . . .	488
6.4.1	Convergence normale de la série entière . . . . .	489
6.4.2	Continuité de la fonction somme . . . . .	489
6.4.3	Primitive de la fonction somme . . . . .	490
6.4.4	Dérivée de la fonction somme . . . . .	491
6.4.5	Dérivées successives de la fonction somme . . . . .	492
6.5	Fonctions développables en série entière . . . . .	493
6.5.1	Définition . . . . .	493
6.5.2	Condition nécessaire . . . . .	494
6.5.3	Condition nécessaire et suffisante . . . . .	496
6.5.4	Condition suffisante . . . . .	498
6.5.5	Développement en série entière des fonctions usuelles . . . . .	499
6.6	Séries entières et équations différentielles . . . . .	502
6.7	Fonction exponentielle complexe . . . . .	504
6.8	Compléments . . . . .	507
6.8.1	Produit de Hadamard . . . . .	507
6.8.2	Théorème de Hadamard . . . . .	510

6.8.3	Théorème d'Abel . . . . .	515
6.8.4	Théorème de Tauber . . . . .	518
6.8.5	Théorème de Cauchy . . . . .	521
6.8.6	Théorème de d'Alembert-Gauss . . . . .	522
6.8.7	Théorème dû à Gutzmer . . . . .	525
6.8.8	Théorème de Liouville . . . . .	527
6.9	Exercices corrigés . . . . .	529
<b>7</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>539</b>
7.1	Introduction . . . . .	539
7.2	Fonctions vectorielles . . . . .	544
7.2.1	Généralités . . . . .	544
7.2.2	Intégrale d'une fonction vectorielle sur un segment . . . . .	547
7.2.3	Inégalité triangulaire . . . . .	549
7.2.4	Inégalité des accroissements finis . . . . .	551
7.2.5	Théorème de Taylor-Young . . . . .	554
7.3	Arcs paramétrés du plan . . . . .	555
7.3.1	Définitions . . . . .	555
7.3.2	Tangente . . . . .	558
7.3.3	Étude locale . . . . .	559
7.3.4	Branches infinies . . . . .	566
7.3.5	Un exemple d'étude d'un arc . . . . .	570
7.4	Différentielle . . . . .	572
7.4.1	Application différentiable . . . . .	572
7.4.2	Différentielle d'une application linéaire . . . . .	577
7.4.3	Différentielle d'une application bilinéaire . . . . .	577
7.4.4	Propriétés des applications différentiables . . . . .	578
7.4.5	Dérivée le long d'un arc . . . . .	581
7.5	Dérivées partielles . . . . .	583
7.5.1	Dérivée directionnelle . . . . .	583
7.5.2	Dérivées partielles dans une base . . . . .	585
7.5.3	Lien entre différentielle et dérivées partielles . . . . .	587
7.5.4	Notation de la différentielle d'une application à valeurs réelles . . . . .	590
7.5.5	Matrice jacobienne et jacobien . . . . .	593

7.5.6	Composition des dérivées partielles . . . . .	596
7.6	Gradient . . . . .	598
7.6.1	Base orthonormée d'un espace euclidien . . . . .	598
7.6.2	Théorème de Riesz . . . . .	599
7.6.3	Définition du gradient . . . . .	601
7.6.4	Propriétés du gradient . . . . .	603
7.6.5	Point critique et extremum . . . . .	608
7.7	Applications de classe $C^1$ . . . . .	611
7.7.1	Condition nécessaire et suffisante . . . . .	611
7.7.2	Opérations sur les applications de classe $C^1$ . . . . .	613
7.7.3	Théorème des accroissements finis . . . . .	615
7.7.4	Inégalité des accroissements finis . . . . .	618
7.7.5	Caractérisation des fonctions constantes . . . . .	618
7.8	Applications de classe $C^k$ pour $k \geq 2$ . . . . .	619
7.8.1	Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$ . . . . .	619
7.8.2	Théorème de Schwarz . . . . .	621
7.9	Extrema locaux d'une fonction de deux variables réelles . . . . .	627
7.9.1	Théorème de Taylor-Young . . . . .	627
7.9.2	Théorème dû à Lagrange . . . . .	631
7.9.3	Exemples . . . . .	635
7.10	Exercices corrigés . . . . .	639
<b>A</b>	<b>Séries de Fourier</b> . . . . .	<b>651</b>
A.1	Définitions . . . . .	651
A.1.1	Série trigonométrique . . . . .	651
A.1.2	Continuité par morceaux . . . . .	652
A.1.3	Coefficients de Fourier et série de Fourier . . . . .	655
A.1.4	L'espace $\mathcal{D}$ et ses propriétés . . . . .	664
A.2	Propriétés . . . . .	667
A.2.1	Inégalité de Bessel . . . . .	667
A.2.2	Lemme de Riemann . . . . .	670
A.3	Théorèmes de convergence . . . . .	673
A.3.1	Convergence en moyenne quadratique et théorème de Parseval . . . . .	674
A.3.2	Une application du théorème de Parseval . . . . .	679



A.3.3	Théorème dû à du Bois-Reymond . . . . .	680
A.3.4	Convergence simple : théorème de Lejeune-Dirichlet . . . . .	685
A.3.5	Convergence normale . . . . .	698
A.3.6	Convergence en moyenne de Cesàro : deux théorèmes de Fejér . . .	699
A.4	Exercices corrigés . . . . .	707

<b>Liste des notices biographiques</b>	<b>728</b>
--	------------

<b>Index</b>	<b>729</b>
--------------	------------

Matériel protégé par le droit d'auteur