

Table des matières

1	Les nombres réels	1
1.1	Ensembles de nombres	1
1.2	Le corps des réels	5
1.3	Ordre sur \mathbb{R}	8
1.4	Parties bornées de \mathbb{R}	11
1.5	Conséquences de l'axiome de la borne supérieure	12
1.6	Exercices	14
2	Suites réelles ou complexes	17
2.1	Suites. Ensembles dénombrables	17
2.2	Suites convergentes	19
2.3	Suites réelles de limite infinie	23
2.4	Propriétés de comparaison	26
2.5	Suites adjacentes	29
2.6	Suites usuelles	30
2.7	Convergence en moyenne	32
2.8	La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$	34
2.9	Exercices	35
3	Notions de topologie dans \mathbb{R}	39
3.1	Intervalles de \mathbb{R}	39
3.2	Ouverts. Fermés	41
3.3	Compacts	45
3.4	Suites de Cauchy	46
3.5	Représentation décimale des nombres réels	48
3.6	Exercices	53
4	Continuité en un point. Limites	57
4.1	À propos de l'ensemble de définition	57
4.2	Limite et continuité en un point	59
4.3	Propriétés	63
4.4	Limite à droite. Limite à gauche	64
4.5	Extensions de la notion de limite	67
4.6	Cas des fonctions monotones	70
4.7	Exercices	72
5	Comparaison des suites. Comparaison des fonctions	77
5.1	Les notations $o(1)$ et $O(1)$	77
5.2	Autres notations usuelles	80
5.3	Équivalence	82
5.4	Accélération de la convergence	86

5.5	Exercices	91
6	Fonctions continues sur un intervalle	95
6.1	Continuité sur un intervalle	95
6.2	Continuité uniforme	97
6.3	Cas des fonctions réelles	100
6.4	Fonction réciproque	104
6.5	Suites réelles de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	108
6.6	Équation $f(x) = 0$. Méthodes de la sécante et de Newton.	111
6.7	Exemples d'équations fonctionnelles	116
6.8	Exercices	121
7	Formules de Taylor	127
7.1	Théorème des accroissements finis	127
7.2	Conséquences des accroissements finis	131
7.3	Formule de Taylor-Lagrange	135
7.4	Formule de Maclaurin	136
7.5	Formule de Taylor-Young	138
7.6	Formule de Taylor avec reste intégral	140
7.7	Cas particulier d'un polynôme.	141
7.8	Exercices	142
8	Développements limités	145
8.1	Introduction	145
8.2	Développement limité d'ordre n en un point	147
8.3	Lien avec les dérivées successives	150
8.4	Opérations usuelles	154
8.5	Application des développements limités	161
8.6	Développements asymptotiques	163
8.7	Exercices	166
9	Fonctions convexes	171
9.1	Ensembles convexes	171
9.2	Fonctions convexes	173
9.3	Propriétés de dérivabilité	177
9.4	Inégalités de convexité	181
9.5	Exercices	184
10	Espaces vectoriels normés	187
10.1	Normes sur un espace vectoriel	187
10.2	Suites	190
10.3	Propriétés métriques	192
10.4	Propriétés topologiques	194
10.5	Distance induite sur une partie	198
10.6	Intérieur. Adhérence	199
10.7	Exercices	204

11 Limite et continuité dans les espaces vectoriels normés	207
11.1 Limite en un point	207
11.2 Continuité en un point	210
11.3 Continuité globale	211
11.4 Applications linéaires continues	215
11.5 Applications multilinéaires continues	219
11.6 Normes équivalentes	220
11.7 Exercices	222
12 Compacts. Connexes. Espaces complets	225
12.1 Parties compactes	225
12.2 Fonctions continues sur un compact	229
12.3 Parties connexes	232
12.4 Suites de Cauchy. Espaces complets	236
12.5 Propriétés des espaces complets	239
12.6 Théorème du point fixe	242
12.7 Exercices	243
13 Espaces préhilbertiens	247
13.1 Espaces préhilbertiens	247
13.2 Familles orthogonales	251
13.3 Projection orthogonale	254
13.4 Polynômes orthogonaux	257
13.5 Exercices	259
14 Suites de fonctions	263
14.1 Convergence	263
14.2 Limite d'une suite de fonctions continues	266
14.3 Cas général	268
14.4 Approximation de fonctions continues par morceaux	270
14.5 Théorème de Weierstrass	272
14.6 Polynômes d'interpolation de Lagrange	275
14.7 Exercices	277
15 Dérivation des fonctions vectorielles	281
15.1 Dérivée première	281
15.2 Règles de calcul	284
15.3 Les accroissements finis	287
15.4 Dérivées d'ordre supérieur	290
15.5 Formules de Taylor	292
15.6 Tangente à une courbe paramétrée	295
15.7 Exercices	299

16	Intégration sur un segment	303
16.1	Intégrale des fonctions en escalier	303
16.2	Intégrale des fonctions continues par morceaux	305
16.3	Moyenne d'une fonction	308
16.4	Primitives et intégrales	312
16.5	Intégration et dérivation d'une suite de fonctions	316
16.6	Fonction définie par une intégrale	318
16.7	Exercices	321
17	Calcul d'intégrales	325
17.1	Généralités	325
17.2	Intégration par parties	327
17.3	Changement de variable	329
17.4	Quelques situations classiques	331
17.5	Calcul approché d'une intégrale	335
17.6	Exercices	338
18	Intégrales impropres	341
18.1	Généralités	341
18.2	Intégrale impropre d'une fonction positive	345
18.3	Convergence et convergence absolue	347
18.4	Méthodes de calcul d'une intégrale impropre	349
18.5	Intégration des relations de comparaison	351
18.6	La fonction Γ	354
18.7	Cas des fonctions vectorielles	356
18.8	Exercices	357
19	Séries réelles ou complexes	361
19.1	Généralités	361
19.2	Séries à termes positifs	365
19.3	Règles de Cauchy et de d'Alembert	370
19.4	Séries semi-convergentes	373
19.5	Produit de deux séries	375
19.6	Associativité et commutativité dans la somme d'une série	377
19.7	Calcul approché de la somme d'une série convergente	379
19.8	Exercices	381
20	Séries de fonctions	385
20.1	Convergence	385
20.2	Propriétés de la fonction somme	391
20.3	Séries dans un espace vectoriel normé	394
20.4	Exercices	397

21	Séries entières	401
21.1	Rayon de convergence	401
21.2	Opérations sur les séries entières	404
21.3	Propriétés de la fonction somme	406
21.4	Fonctions développables en série entière	409
21.5	Fonction exponentielle complexe	416
21.6	Exercices	418
22	Séries de Fourier	421
22.1	Séries trigonométriques	421
22.2	Séries de Fourier	426
22.3	L'espace préhilbertien $\mathcal{D}_{2\pi}$	431
22.4	Théorème de Parseval	435
22.5	Convergence simple. Convergence normale	438
22.6	Cas des fonctions de période T	440
22.7	Exercices	441
23	Équations différentielles linéaires du premier ordre	447
23.1	Équations scalaires	447
23.2	Équations vectorielles	451
23.3	Problème de Cauchy	452
23.4	Résolution théorique	456
23.5	Systèmes à coefficients constants	460
23.6	Exercices	465
24	Équations différentielles linéaires du second ordre	469
24.1	Définitions	469
24.2	Problème de Cauchy	470
24.3	Résolution théorique	470
24.4	Résolution de l'équation linéaire homogène	473
24.5	Recherche d'une solution particulière	477
24.6	Séries entières et équations différentielles	480
24.7	Exercices	483
25	Notions sur les équations différentielles non linéaires	485
25.1	Généralités	485
25.2	Approche géométrique	489
25.3	Le problème de Cauchy	493
25.4	Quelques équations classiques	496
25.5	La méthode d'Euler	502
25.6	Exercices	506
26	Fonctions différentiables	509
26.1	Dérivées partielles	509
26.2	Fonctions différentiables	514
26.3	Cas particuliers importants	516

26.4	Cas général	521
26.5	Composition	524
26.6	Difféomorphismes	527
26.7	Exercices	531
27	Calcul Différentiel	535
27.1	Les accroissements finis	535
27.2	Fonctions numériques deux fois différentiables	538
27.3	Formule de Taylor-Young	540
27.4	Extrema	543
27.5	Inversion locale	546
27.6	Les fonctions implicites	549
27.7	Applications géométriques	552
27.8	Exercices	556
28	Calcul intégral dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3	559
28.1	Champ de vecteurs	559
28.2	Circulation d'un champ de vecteurs	562
28.3	Formes différentielles	564
28.4	Intégrale double sur un compact simple	566
28.5	Propriétés de l'intégrale double	571
28.6	Quelques questions et commentaires	575
28.7	Formule de Green-Riemann	578
28.8	Intégrales triples	580
28.9	Exercices	585
	Bibliographie	587
	Index	588