

Table des matières

1	Formes différentielles dans le plan	1
1.1	Formes différentielles dans \mathbb{R}^2 d'ordre 0 ou 1	1
1.2	Différentiation des 0-formes	2
1.3	Formes d'ordre 2 ; différentiation des 1-formes	3
1.4	Intégration d'une 1-forme sur un chemin C^1 par morceaux	5
1.5	1-formes exactes, 1-formes fermées	7
1.6	Le lemme de Poincaré	8
1.7	Intégration d'une 2-forme sur une 2-chaîne	11
1.8	La formule de Cauchy-Pompeiu	15
1.9	La formule de Green-Riemann	17
1.10	Solutions des exercices de compréhension	19
1.11	Quelques sujets de problèmes	26
1.11.1	Comment une formule analytique peut se substituer à un algorithme algébrique	26
1.11.2	Le théorème du point fixe de Brouwer dans le disque unité	27
2	Holomorphie, analyticité, harmonicité	29
2.1	Fonctions holomorphes	29
2.2	Fonctions analytiques dans un ouvert de \mathbb{R}^2	33
2.3	Rappels concernant les séries entieres	35
2.4	Le lien entre holomorphie et analyticité	42
2.5	Les inégalités de Cauchy	48
2.6	Suites et séries de fonctions holomorphes	50
2.7	Le principe des zéros isolés	58
2.8	Le théorème de l'image ouverte	62
2.9	Le principe du maximum	65
2.10	Primitives de fonctions holomorphes	71
2.10.1	Primitive d'une fonction analytique dans un disque	71
2.10.2	Le théorème de Morera et ses conséquences	71
2.10.3	Primitive d'une fonction holomorphe dans un ouvert étoilé	77
2.10.4	Le théorème de Cauchy-Goursat	79
2.11	Fonctions harmoniques	81
2.11.1	L'opérateur laplacien	81
2.11.2	La relation entre harmonicité et holomorphie	82
2.11.3	Formule de représentation intégrale de Poisson	84
2.11.4	Le problème de Dirichlet pour un disque	86
2.11.5	La formule de Green-Ostrogradski	89
2.12	Solutions des exercices de compréhension	93
2.12.1	Exercices relatifs à la section 2.1	93
2.12.2	Exercices de la section 2.2	98

2.12.3	Exercices relatifs aux sections 2.3 à 2.5	101
2.12.4	Exercices relatifs à la section 2.6	109
2.12.5	Exercices relatifs à la section 2.7	114
2.12.6	Un sujet de problème : autour du théorème de Cramer	115
2.12.7	Un sujet de problème : autour de la transformation de Borel	117
2.12.8	Exercices relatifs aux sections 2.8 et 2.9	118
2.12.9	Exercices relatifs à la section 2.10	124
2.12.10	Un sujet de problème : le principe du minimum	132
2.12.11	Exercices relatifs à la section 2.11	135
2.12.12	Un sujet de problème : la formule de Jensen	142
3	Initiation à la théorie des distributions	145
3.1	Espace des fonctions-test dans un ouvert de \mathbf{R}^d	145
3.2	Notion de distribution (définie) sur un ouvert de \mathbf{R}^d	148
3.3	Exemples ; modélisation des phénomènes	150
3.4	Suites de distributions et régularisation	156
3.5	Le support d'une distribution	160
3.5.1	Définition du support, exemples	160
3.5.2	Distributions à support compact, exemples	162
3.6	Opérations sur les distributions	168
3.6.1	La dérivation	168
3.6.2	La multiplication par une fonction C^∞	171
3.6.3	Le produit tensoriel	173
3.7	La formule des sauts	176
3.8	Solutions fondamentales (et exemples $\partial/\partial\bar{z}$ et Δ)	179
3.9	La convolution	183
3.9.1	Clause de définition en termes de supports	185
3.9.2	Les algèbres de convolution $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ et \mathcal{D}'_+	189
3.9.3	Une relecture des formules de Cauchy-Pompeïu ; notion d'hypo-ellipticité	191
3.10	Les distributions tempérées	199
3.10.1	L'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et les signaux gaussiens	199
3.10.2	L'espace $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$	204
3.10.3	Le spectre d'une distribution tempérée ; le cas de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$	207
3.10.4	Convolution et prise de spectre, exemples	212
3.10.5	Distributions périodiques et formule sommatoire de Poisson	215
3.10.6	Distributions à spectre borné ; échantillonnage	218
3.11	Solutions des exercices de compréhension	223
3.11.1	Exercices relatifs aux sections 3.1 et 3.2	223
3.11.2	Exercices relatifs aux sections 3.3 à 3.5	226
3.11.3	Exercices relatifs aux sections 3.6 à 3.8	237
3.11.4	Exercices relatifs à la section 3.9	244
3.11.5	Autour du théorème de Runge (thème de problème)	251
3.11.6	Exercices relatifs à la section 3.10	253
4	Topologie dans le champ complexe	261
4.1	Chemins continus dans \mathbf{R}^2	261
4.1.1	Notion de chemin continu ; opérations simples	261
4.1.2	Primitives d'une forme fermée le long d'un chemin continu	262

4.1.3	Homotopie entre chemins continus ou lacets	269
4.1.4	Notion de simple connexité	273
4.2	Variation de l'argument	278
4.2.1	Relèvement d'un chemin continu de \mathbb{C}^*	278
4.2.2	Degré d'un lacet de \mathbb{C}^*	281
4.2.3	Indice d'un lacet par rapport à un point	284
4.2.4	Le théorème de Rouché	289
4.2.5	Bilan total de la variation de l'argument	295
4.3	Singularités isolées et résidus	296
4.3.1	Développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne	296
4.3.2	Résidu d'une forme holomorphe en une singularité isolée	300
4.3.3	La notion d'infini dans le champ complexe (deux aspects)	302
4.3.4	La hiérarchie des singularités isolées	304
4.3.5	Fonctions méromorphes, calculs de résidus	310
4.3.6	Notion de résidu à l'infini	316
4.4	Le théorème des résidus et ses applications	318
4.4.1	Une version homotopique du théorème des résidus	318
4.4.2	La formule des résidus (version Green-Riemann)	323
4.4.3	Résidus et division	326
4.4.4	Les lemmes pratiques du type Jordan	328
4.4.5	Une courte digression à propos du logarithme complexe	334
4.4.6	Intégrales mêlant puissances, logarithmes, fractions,	335
4.5	Produits infinis, dérivées logarithmiques	341
4.6	Univalence et conformité	346
4.6.1	La notion de conformité	346
4.6.2	Les homographies	347
4.6.3	La notion d'univalence ; le théorème d'Hurwitz	349
4.6.4	Le théorème de Riemann	351
4.7	Solutions des exercices de compréhension	355
4.7.1	Exercices relatifs à la section 4.1	355
4.7.2	Exercices relatifs à la section 4.2	356
4.7.3	Exercices relatifs à la section 4.3	366
4.7.4	Un thème de problème : autour des fonctions de Bessel	370
4.7.5	Exercices relatifs à la section 4.4	372
4.7.6	Exercices relatifs à la section 4.5	377
4.7.7	Thème de problème : autour des nombres premiers	379
4.7.8	Exercices relatifs à la section 4.6	380