Annales
corrigées et commentées

Concours
2021 / 2022 / 2023

MP MP*

Maths et informatique

3e édition

Concours commun Mines-Ponts
Centrale-Supélec
CCINP

ellipses

Abdellah Bechata
Christophe Devulder

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

EXERCICE I

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}.$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t) \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE II

Q3. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall (a, b, c) \in \,]0, +\infty[^3, \qquad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par :

$$f(x; y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

Q4. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

PROBLÈME
Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0=1,\qquad \forall n\geq 1,\ b_n=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k.$$

Leonhard Euler (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, \zeta(2k)=\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}b_{2k}}{(2k)!}.$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli b_n afin d'obtenir des valeurs exactes de $\zeta(2k)$.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

Q5. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n\in\mathbb{N}$.

Q6. On considère la fonction Python suivante `binom(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

```
def binom(n, p):
    if not(0<= p <= n):
        return 0
    return factorielle(n)//(factorielle(p)*factorielle(n-p))
```

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30,10)`?
Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ? Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par
`return factorielle(n)/(factorielle(p)*factorielle(n-p))`?

Q7. Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Q8. Écrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n. On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Par exemple `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \frac{5}{66}$.

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} .$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x} .$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a, b) \in A\ ,\ ab = n\}$.

Partie III - Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

Q15. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.

Q16. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n|N.$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

Q17. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Q19. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Q20. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $l \geq \zeta(s)$.
Conclure.

FIN

SOLUTION

Q1. La fonction $f_k(t) = t^{2k}\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et $f_k(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1/2}}\right)$ car

$$t^{1/2} f_k(t) = t^{2k+1/2}\ln(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$$

d'après les croissances comparées (puisque $2k+\dfrac{1}{2} > 0$). La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ étant intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann de paramètre $\dfrac{1}{2} < 1$), on en déduit que la fonction f l'est aussi. En outre, par intégration par parties (en intégrant t^{2k} en $\dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et en dérivant $\ln(t)$ en $\dfrac{1}{t}$), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_k(t)\,dt &= \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln(t)\right]_{t\to 0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\times\frac{1}{t}dt = -\frac{1}{2k+1}\int_0^1 t^{2k}dt \\ &= -\frac{1}{2k+1}\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

Commentaires : *Le calcul est standard et ne doit pas poser de problème. Par contre, l'existence de l'intégrale est trop souvent mal rédigé par les candidats : conrinuité, étude en chaque point, mention et justification des comparaisons. La question étant standard et sans difficulté particulière, les correcteurs de tous les concours sont absolument intransigeants sur la rédaction.*

Q2. Intégrabilité. La fonction $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{-1} = o\left(\dfrac{1}{t^{1/2}}\right)$ (car $t^{1/2}\ln(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$ d'après les croissances comparées puisque $\dfrac{1}{2} > 0$) et que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann de paramètre $\dfrac{1}{2} < 1$), on en déduit que la fonction f l'est aussi.
Preuve de l'égalité. D'après la série géométrique, comme $\left|t^2\right| = |t|^2 < 1$ si $t \in [0,1[$, on peut affirmer que

$$f(t) = \frac{-\ln(t)}{1-t^2} = -\ln(t)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(t^2\right)^k = -\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty} f_k.$$

Nous allons utiliser un théorème de permutation série-intégrale. Pour chaque entier k, la fonction f_k est continue et intégrable sur $]0,1[$. La série $\sum\limits_{k\geqslant 0}(-f_k)$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-f_k) = f$ est continue sur cet intervalle. En outre, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\int_0^1 |f_k| = \sum\limits_{k\geqslant 0} -\int_0^1 f_k$ (car f_k est positive sur cet intervalle) $= \sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge (son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{(2k)^2} = \dfrac{1}{4k^2}$ qui est le terme général d'une série positive convergente, série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$). Par conséquent, on peut affirmer que

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-f_k) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

En scindant la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ selon les indices pairs et impairs, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ n \text{ pair} \\ \text{i.e. } n=2k \text{ avec } k\in\mathbb{N}^*}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ n \text{ impair} \\ \text{i.e. } n=2k+1 \text{ avec } k\in\mathbb{N}}} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous venons de prouver l'égalité

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} + \int_0^1 f \Leftrightarrow \int_0^1 f = \pi^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right) = \frac{\pi^2}{24}(4-1) = \frac{\pi^2 3}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Commentaires : *Il s'agit d'une question ouverte qui demande autonomie, initiative et technicité de la part du candidat donc elle est nécessaire sélective (mais bien rétribuée par le barême). Si la permutation série-intégrale est formellement faite par un grand nombre de candidats, beaucoup trop de candidats ne rédigent pas correctement les hypothèses nécessaires au théorème utilisé. Je ne parle pas d'une minorité (importante) qui ne voit même pas qu'il y a un théorème à mettre en place ! Soyez méticuleux et rigoureux.*

Q3. La fonction $f = \ln$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée seconde $f'' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ y est négative. Par conséquent, f est concave donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tous réels $\lambda_1, .., \lambda_n$ positifs de somme 1, pour tous réels $x_1, .., x_n$ de $]0, +\infty[$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i).$$

En choisissant $n = 3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ et $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqslant \frac{1}{3}(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)) = \frac{1}{3}\ln(abc) = \ln\left((abc)^{1/3}\right).$$

En composant cette inégalité par la fonction exponentielle qui est strictement croissante, on obtient l'inégalité

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Commentaires : *Il s'agit d'une question de cours.*

Q4. La fonction f est différentiable sur $]0,+\infty[^2$ (comme somme de fractions rationnelles qui sont définies sur cet ensemble). Si $A=(x,y)$ est un point critique de f sur cet ensemble, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{1}{x^2y}=0 \\ 1-\dfrac{1}{xy^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2y}=1 \\ \dfrac{1}{xy^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y=1 \\ xy^2=1 \end{cases}$$

En divisant la première égalité par la seconde, on obtient l'égalité $\dfrac{x}{y}=1 \Leftrightarrow x=y$ puis en réinjectant cette égalité dans l'une des deux précédentes, on obtient $x^3=1 \Leftrightarrow x=1$ donc $A=(1,1)$ est unique.
Comme $f(A)=f(1,1)=3$ et en appliquant l'inégalité de la question précédente avec $a=x$, $b=y$, $c=\dfrac{1}{xy}$, on peut écrire

$$\sqrt[3]{xy\times\frac{1}{xy}} \leqslant \frac{1}{3}\left(x+y+\frac{1}{xy}\right) \Leftrightarrow f(A)=3\leqslant f(x,y)$$

donc A est un minimum global de f sur $]0,+\infty[^2$. La fonction f n'admet aucun maximum local sur cet ensemble. En effet, si c'était le cas, ce maximum se réalise en un point B de $]0,+\infty[^2$. Comme f est différentiable sur cet ouvert, B est un point critique de f donc $B=A$, ce qui est absurde car A est un minimum local et la fonction f n'est manifestement pas constante.
Conclusion : f n'admet aucun maximum local et un unique minimum (local et global) en $(1,1)$.

Commentaires : *La recherche des points critiques est relativement aisée et ne doit pas vous posez de problème particulier. Par contre, le second point (déterminer les extrémums et leurs natures) est d'une autre difficulté. Elle exige du candidat une connaisse solide de son cours (par exemple, pour exploiter la hessienne de f en $(1,1)$) et / ou faire preuve d'autonomie et d'initiative (faire le lien avec la question précédente). Ce second point est destinée aux meilleures copies.*

Q5.

```
def factorielle_rec(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*factorielle_rec(n-1)

def factorielle_it(n):
    f=1
    for i in range(1,n+1):
        f=f*i
    return f
```

Commentaires : *Question de cours sans aucune difficulté.*