Annales
corrigées et commentées

Concours
2021 / 2022 / 2023

PSI

Maths et informatique

3e édition

- Concours commun Mines-Ponts
- Centrale-Supélec
- CCINP
- e3a

ellipses

Abdellah Bechata
Olivier Bertrand
Walter Damin

Sujet n° 1

Mines 2021 – Maths 1

L'énoncé

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter :

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ – dite de dispersion d'ordre α – lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$P(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = P(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ appelée $n^{\text{ème}}$ moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $P(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4. Soient X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique, et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $E(f(X)) = 0$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On introduit la fonction :

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz}\, du.$$

6. Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée $n^{\text{ème}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

7. Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leqslant |1 - tz|$, et plus précisément encore que l'on a l'égalité $1 - t < |1 - tz|$.

8. En déduire successivement que :

$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10. Montrer que la fonction : $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,u) & \longmapsto & \left|1 + ue^{it}\right| \end{array} \right.$ est continue.
En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad \left|1 + ue^{it}\right| \geqslant m_a.$$

11. Montrer que la fonction :

$$F : t \in]-\pi, \pi[\mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}}\, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12. Montrer que :

$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.

13. Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose :

$$\Phi_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & E\left(\cos(tX)\right), \end{array} \right.$$

appelée fonction caractéristique de X.

14. Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.

15. En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$R_n := P(|X| \geqslant n).$$

16. On fixe un réel $t \in]0,2\pi[$. Montrer successivement que :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17. Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18. Conclure que, quand t tend vers 0^+, $\Phi_X(t) = 1 - \dfrac{\pi\alpha}{2} t + o(t)$.

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des M_n

19. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$,

$$P(a \leqslant M_n \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{du}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

Fin du problème

Le corrigé commenté

Questions de cours

1.

Commentaires

Faire un corrigé de sujet de concours permet de rappeler de temps en temps le cours. Ce qui est toujours utile car connaître son cours est la règle de base que ce soit à l'écrit qu'à l'oral.

Ici rappelons la notion d"espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs réelles ou complexes.

L'espérance d'une variable aléatoire discrète X **à valeurs dans** $[0, +\infty]$ est :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$$

(qui appartient à $[0, +\infty]$).
On adopte la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.
Par ailleurs, X variable aléatoire discrète est dite **d'espérance finie** si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas, la somme (qui a une valeur finie) de cette famille est **l'espérance de** X.
Dans le cas où $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$, où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ ou $x_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in I$, X est donc d'espérance finie si la série $\sum_{n \in I} x_n P(X = x_n)$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si la série

$$\sum_{n \in I} |x_n| P(X = x_n)$$

converge.
Un certain nombre de candidats ont oublié cette partie du cours et ont écrit directement que l'espérance est finie si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$ est convergente, ce qui est faux.

La convergence de la série $\sum_{n \in I} |x_n| P(X = x_n)$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum_{n \in I} x_n P(X = x_n)$ car une probabilité est positive et pour tout $n \in I$, on a l'égalité :

$$|P(X = x_n)| = P(X = x_n).$$

Par ailleurs, il est clair que la convergence absolue de la série $\sum_{n\in I} |x_n|P(X = x_n)$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum_{n\in I} x_n P(X = x_n)$ donc X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2. On suppose qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $P(|X| \leqslant M) = 1$.
Et on reprend ici : $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$.

$$\forall n \in I,\ |x_n|P(X = x_n) \leqslant MP(X = x_n).$$

En effet, soit $|x_n| \leqslant M$ et on a bien cette inégalité, soit $|x_n| > M$, et alors

$$(X = x_n) \subset (|X| > M).$$

Ce qui donne :

$$P(X = x_n) \leqslant P(|X| > M) = 0$$

et donc $P(X = x_n) = 0$, l'inégalité devient ainsi $0 \leqslant 0$ et reste vraie.
De plus la série $\sum_{n\in I} MP(X = x_n)$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\in I} x_n P(X = x_n)$ converge absolument et donc X est d'espérance finie.

Commentaires

Ici aussi, beaucoup d'erreurs dans les copies des candidats. Il y a eu une confusion fréquente entre « X est bornée » et « X ne prend qu'un nombre fini de valeurs » parfois parce que X est implicitement supposée à valeurs entières.

Généralités sur les variables aléatoires

3.

Commentaires

Quelques piqûres de rappels de cours pour commencer.

On rappelle que si X est une variable aléatoire entière, la variable aléatoire $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si la série

$$\sum_{n\geqslant 1} P(|X| \geqslant n)$$

est convergente.

En particulier, si X est une variable aléatoire entière à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$

La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} P(X \geqslant n)$ correspond au cas où X est d'espérance finie.

- *Montrons que X n'est pas d'espérance finie.*

D'après la question **1**, X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ l'est.

Comme $|X|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'après le rappel de cours en commentaires, $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si la série

$$\sum_{n\geqslant 1} P(|X| \geqslant n)$$

est convergente. On suppose de plus que X vérifie $(\mathcal{D}_\alpha)$.

$$\text{Quand } n \to +\infty,\ P(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Et donc quand $n \to +\infty$, $P(|X| \geqslant n) \sim \dfrac{\alpha}{n}$.

Commentaires

On rappelle que $\alpha > 0$ et donc $\alpha \neq 0$, et donc l'équivalent est licite.

Par ailleurs, la méthode des équivalents pour connaître la nature de la série fonctionne car le terme général est strictement positif. En fait, le seul cas où cette méthode ne fonctionne pas, c'est pour une série alternée. En effet, si le terme général est strictement négatif, il suffit de prendre la série de termes opposés, la nature est alors la même que pour la série de départ.

Comme la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente, comme chacun sait, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} P(|X| \geqslant n)$ diverge aussi :

ainsi $|X|$ n'est pas d'espérance finie, et X non plus.

- *Montrons que X^2 n'est pas d'espérance finie.*

Partons du fait que $|X|$ n'est pas d'espérance finie et notons $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in I\}$, alors ici $x_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in I$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n| P(X = x_n)$ est donc divergente.

Il s'agit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est aussi divergente.

Pour cela, on utilise l'inégalité $(|x_n| - 1)^2 \geqslant 0$ pour tout $n \in I$ et donc

$$x_n^2 + 1 \geqslant 2|x_n|.$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|P(X = x_n)$ est divergente, $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est divergente, ce qui signifie que

$$\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$$

n'est pas absolument convergente car $x_n^2 P(X = x_n)$ est positif (ou encore que $\left\{x_n^2 P(X = x_n)\right\}_n$ n'est pas sommable) et donc X^2 n'est pas d'espérance finie.

Commentaires

La démonstration reste la même si X est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

En effet, pour montrer que X n'est pas d'espérance finie implique que X^2 n'est pas d'espérance finie, on utilise l'inégalité

$$(|x_n| - 1)^2 \geqslant 0$$

pour tout $n \in I$ et donc $|x_n|^2 + 1 \geqslant 2|x_n|$.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|P(X = x_n)$ est divergente, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2 P(X = x_n)$$

est divergente, ce qui signifie que $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$ n'est pas absolument convergente (ou $\left\{x_n^2 P(X = x_n)\right\}_n$ n'est pas sommable) et donc X^2 n'est pas d'espérance finie.

4. • D'après la définition des variables aléatoires symétriques, les variables aléatoires X et $-X$ ont la même loi. On utilise aussi le principe de transfert de l'égalité en loi (c'est le théorème 1 de l'énoncé), $f(X)$ et $f(-X)$ ont aussi la même loi. Comme f est impaire, $f(X)$ et $-f(X)$ ont donc la même loi donc $f(X)$ est symétrique.

• Supposons que $f(X)$ soit d'espérance finie.

Comme $f(X)$ et $-f(X)$ ont la même loi, leurs espérances sont égales, ce qui justifie la première égalité qui va suivre. Puis on justifie la deuxième égalité par linéarité de l'espérance.

$$E\left(f(X)\right) = E\left(-f(X)\right) = -E\left(f(X)\right).$$

On en déduit : $E(f(X)) = 0$.

Commentaires

Pour montrer que $E(f(X)) = 0$, on pouvait passer par sa définition.

Comme X et $-X$ ont la même loi, supposons $X(\Omega) = \{x_k,\, k \in I\}$.

Pour tout $k \in I$, $P(X = x_k) = P(-X = x_k)$ et donc pour tout $k \in I$, on a l'égalité :

$$P(X = x_k) = P(X = -x_k).$$