COURS ET TRAVAUX DIRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Analyse et probabilités

COURS DÉTAILLÉ AVEC DÉMONSTRATIONS COMMENTÉES, ASTUCES, MISES EN GARDE

L'ESSENTIEL SOUS FORME DE SYNTHÈSES, MÉTHODES ET TD

LES EXERCICES AVEC LEURS CORRIGÉS COMPLETS ET EXPLIQUÉS

L1

Nicolas Nguyen

ellipses

CHAPITRE 1

Introduction

Comme il est bien connu, les réels peuvent être représentés sur le droite dite numérique, ils y apparaissent bien « rangés », l'ordre croissant allant de la gauche vers la droite. Ce premier chapitre d'Analyse est l'occasion de présenter la structure d'ensemble ordonné des réels.
Comme nous le verrons dans la suite du cours, les propriétés de l'ensemble ordonné des réels et tout particulièrement la propriété de la borne supérieure jouent un rôle essentiel pour l'étude des fonctions, des suites. Ce n'est pas un hasard si les notions de croissance (ou de décroissance) sont aussi présentes dans les études de suites et de fonctions. Elles traduisent simplement la compatibilité de ces objets avec la relation d'ordre $\leqslant$.
Ce chapitre aura de nombreuses conséquences en Analyse, plus particulièrement les théorèmes dit « existentiels », c'est-à-dire dont le résultat est l'existence d'un objet, on peut ainsi penser au théorème de la limite monotone (toute suite de réels croissante et majorée possède une limite) ou au théorème des valeurs intermédiaires.
Après une courte description des ensembles ordonnés, nous introduirons les notions de borne supérieure et inférieure d'une partie et nous établirons quelques conséquences de la propriété de la borne supérieure.

Objectifs

À la fin du chapitre vous devrez savoir manipuler les inégalités aussi naturellement que le calcul algébrique, et notamment majorer ou minorer :

- ▷ Une expression algébrique simple mettant en jeu, somme, différence, produit ou quotient ;
- ▷ La valeur absolue d'une somme ou d'une différence à l'aide des inégalité triangulaires.

Concernant les bornes supérieures (ou inférieures de la même manière), vous devrez savoir :

- ▷ Établir l'existence d'une borne supérieure à l'aide de la propriété de la borne supérieure ;
- ▷ Calculer cette borne à l'aide de la caractérisation de la borne supérieure et de la propriété d'Archimède.

Ensemble ordonné des réels

Plan du cours détaillé

COURS DÉTAILLÉ

Section I. Ensembles ordonnés

1 Généralités sur les ensembles ordonnés

a. Relation d'ordre sur un ensemble

Définition : *Soit $\preceq$ une relation sur E.*
On dit que $\preceq$ est une ***relation d'ordre*** *sur E si*

- *$\preceq$ est* ***réflexive*** *: pour tout $x \in E, x \preceq x$*
- *$\preceq$ est* ***antisymétrique*** *: pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors $x = y$*
- *$\preceq$ est* ***transitive*** *: pour tout $(x, y, z) \in E^3$ si $x \preceq y$ et $y \preceq z$ alors $x \preceq z$.*

⚠ La relation d'ordre-strict n'est pas une relation d'ordre, puisqu'elle n'est pas réflexive.

Notation : *On note parfois $\prec$ la relation dite d'**ordre-strict** associée à $\preceq$. On note $x \prec y$ lorsque $x \preceq y$ et $x \neq y$.*

Exemple : La relation inférieur ou égal, $\leqslant$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Dans l'ensemble $\mathscr{P}(S)$ des parties d'un ensemble S, l'inclusion $\subset$ est aussi une relation d'ordre.
En effet,

- Pour toute partie $A \subset S$, on a $A \subset A$;
- Pour tout couple (A, B) de parties de S, si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$;
- Pour tout triplet (A, B, C) de parties de S, si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

b. Structure d'ensemble ordonné

Définition : *Un ensemble ordonné est un couple $(E, \preceq)$ où $\preceq$ est une relation d'ordre sur E.*

En pratique : Dans un ensemble ordonné, l'anti-symétrie de la relation d'ordre donne une stratégie intéressante pour établir une égalité $x = y$. Il suffit de prouver que $x \preceq y$ et $x \succeq y$.

Définition : *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.*

- *Deux éléments x, y de E sont dits* ***comparables*** *si $(x \preceq y)$ ou $(y \preceq x)$.*
- *Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, c'est-à-dire*

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad (x \preceq y) \text{ ou } (y \preceq x),$$

on dit que est un ensemble ***totalement ordonné****.*
Dans le cas contraire, on dit que $(E, \preceq)$ est ***partiellement ordonné****.*

Exemple : $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné, tandis que $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ n'est que partiellement ordonné.

2 Éléments remarquables d'un ensemble ordonné

a. Majorants et minorants

Définition : *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et $A \in \mathscr{P}(E)$.*

- *Un élément $x \in E$ est appelé un* ***majorant*** *de A dans E si :*

$$\forall a \in A, \quad a \preceq x$$

- *Un élément $x \in E$ est appelé un* ***minorant*** *de A dans E si :*

$$\forall a \in A, \quad a \succeq x$$

L'ensemble des majorants (respectivement des minorants) de A dans E est noté $\mathsf{Maj}_E(A)$ *(resp.* $\mathsf{Min}_E(A)$*).*

b. Plus grand et plus petit éléments d'une partie

Définition : *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et $A \in \mathscr{P}(E)$.*

- *Un élément $\alpha \in A$ est appelé* ***plus grand élément*** *de A si α est à la fois un élément et un majorant de A.*
- *Un élément $\alpha \in A$ est appelé* ***plus petit élément*** *de A si α est à la fois un élément et un minorant de A.*

Intuitivement, s'il existe *un* plus grand élément de A est unique. On pourra donc l'appeler *le* plus grand élément de A.

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ ordonné par $\leqslant$. On considère la partie $A = [0, 1[$. Quel est l'ensemble des minorants de A dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de ses majorants. A possède-t-il un plus petit élément, un plus grand élément ?

Proposition 1.1. Unicité du plus grand élément
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- Si A possède un plus grand élément α, alors il est unique.
  On note dans ce cas $\alpha = \max(A)$.
- Si A possède un plus petit élément α, alors il est unique.
  On note dans ce cas $\alpha = \min(A)$.

□ **Démonstration**
Montrons l'unicité du plus grand élément.
Soit (α, β) un couple de plus grands éléments de A. Alors par définition α et β sont à la fois des éléments et des majorants de A.

- Comme α est un élément de A et que β majore A, on a $\alpha \preceq \beta$.
- Comme β est un élément de A et que α majore A, on a $\beta \preceq \alpha$.
- Par anti-symétrie de $\preceq$, nous en déduisons que $\alpha = \beta$. □

c. Borne supérieure et borne inférieure d'une partie

Définition : *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et $A \in \mathscr{P}(E)$.*

- *On appelle* ***borne supérieure de*** *A, si elle existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E. On note alors*

$$\sup_E(A) = \min \mathsf{Maj}_E(A)$$

- *On appelle* **borne inférieure de** *A, si elle existe, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A dans E. On note alors*

$$\sup_E(A) = \max \mathsf{Min}_E(A)$$

Remarque : Il est important de comprendre que lorsque on recherche un majorant α d'une partie A, plus α est petit (pour l'ordre $\preceq$) et mieux c'est !
Ainsi, si elle existe, la borne supérieure d'une partie A étant par définition le plus petit des majorants, c'est tout simplement le **meilleur** majorant de A.
De la même manière, la borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants, c'est donc le meilleur minorant de A.

Proposition 1.2. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- Si A possède un plus grand élément, alors $\max A$ est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire :

$$\max(A) = \sup_E(A)$$

- Si A possède un plus petit élément, alors $\min A$ est le plus grand majorant de A, c'est-à-dire :

$$\min(A) = \inf_E(A)$$

Nous démontrons ici, uniquement le premier •. Le deuxième est laissé à titre d'exercice !

□ **Démonstration**

Supposons que A possède un plus grand élément, $\alpha = \max(A)$. Il s'agit donc à la fois d'un élément et d'un majorant de A.

• Observons tout d'abord que α est un majorant de A, $\alpha \in \mathsf{Maj}_E(A)$.

• Montrons également que α est un minorant de l'ensemble des majorants.

Soit donc $x \in \mathsf{Maj}_E A$. Comme α est élément de A, nous obtenons $x \succeq \alpha$. Ceci étant vrai pour tout majorant x de A, nous pouvons conclure que α est un minorant de $\mathsf{Maj}_E(A)$.

• Pour conclure, nous avons ainsi démontré que d'une part $\alpha \in \mathsf{Maj}_E A$ et d'autre part que α est un minorant de $\mathsf{Maj}_E A$. Par définition, α est le plus petit élément de $\mathsf{Maj}_E(A)$, soit

$$\alpha = \sup_E(A)$$

□

Remarque : Il faut comprendre cette proposition suivante de la façon suivante. Lorsque A possède un plus grand élément, la borne supérieure de A n'apporte rien de plus. En revanche, lorsque la partie A n'a pas de plus grand élément, la borne supérieure, si elle existe, joue s'y substitue : certes A n'a pas de plus grand élément, mais il a un meilleur majorant.

Section II. $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

1 Les différents ensembles de nombres

Il n'est pas inutile de débuter l'étude de $\mathbb{R}$ comme ensemble ordonné par rappeler succinctement quels sont les différents ensembles de nombres.

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels
L'ensemble $\mathbb{N} = \{0,\ 1\ ,2\ ,3\ ,4,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$ est celui des nombres entiers naturels. On peut toujours ajouter et multiplier des entiers naturels, mais la soustraction et la division ne sont pas toujours possibles dans $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs
L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ est celui des nombres relatifs. Tout élément de $\mathbb{Z}$ possède un opposé dans $\mathbb{Z}$: la soustraction est toujours possible entre entiers relatifs. Par contre, la division n'est pas toujours possible dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels
L'ensemble $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star\}$ est celui des rationnels. L'addition, la soustraction et la multiplication sont toujours possibles entre rationnels. Tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ possède un inverse : la division par un rationnel non nul est toujours possible. Par contre, certains nombres construits de façon naturelle ne sont pas rationnels.

Vocabulaire : *Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits **irrationnels**.*

$\mathbb{D}$ ensemble des nombres décimaux
Les nombres réels peuvent tous être représentés comme des nombres à virgule. En général, la suite des décimales (les chiffres à droite de la virgule) est infinie. C'est le cas par exemple, pour π dont on connaît aujourd'hui les 10 000 milliards premières décimales !

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \cdots$$

Pour un nombre rationnel,

- ▷ Soit la suite des décimales est finie, comme $12,623\ 16$;
- ▷ Soit cette suite est périodique, comme par exemple $1,385\ 385\ \cdots$.

L'ensemble $\mathbb{D} = \{\frac{p}{10^n};\ p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est précisément l'ensemble des nombres réels qui ont une partie décimale finie.

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels
Les nombres rationnels ne sont pas suffisants pour représenter tous les nombres. Les constructions de l'ensemble des nombres réels ne sont pas au programme, mais on peut très bien se représenter cet ensemble de nombres à l'aide de la droite graduée.

Soit $\mathcal{D}$ une droite munie d'un repère $(O, \vec{\imath})$. À tout réel $x \in \mathbb{R}$, on associe son image sur la droite, le point $M(x)$ d'abscisse x. On pourra retenir la chaîne d'inclusions des ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Lorsqu'on dit « x est inférieur à y », on sous-entend toujours « x est inférieur **ou égal** à y »

Proposition 1.3. Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont totalement ordonnés par la relation « inférieur ou égal », relation notée $\leqslant$.

Remarque : On peut démontrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ qui soit compatible avec les opérations algébriques (voir le paragraphe suivant).

Lorsque dans une chaîne d'inégaliés, l'une est stricte, le résultat est strict.

Proposition 1.4. Transitivité améliorée
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- Si $x \leqslant y$ et $y < z$ alors $x < z$.
- Si $x < y$ et $y \leqslant z$ alors $x < z$.

□ **Démonstration**
Montrons le premier •. On se rappelle que $y < z$ signifie que $y \leqslant z$ et $y \neq z$.

$\boxed{1}$ En particulier, les hypothèses impliquent que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$. Par transitivité de la relation d'ordre, on a donc $x \leqslant z$.

$\boxed{2}$ Montrons désormais que $x \neq z$ par l'absurde. Supposons au contraire que $x = z$. En ce cas, les hypothèses peuvent s'écrire sous la forme

$$z \leqslant y \text{ et } y < z$$

Ceci entraine donc que $z \leqslant y$ et $y \leqslant z$, d'où l'on tire par antisymétrie de l'ordre que $y = z$, contrairement à l'hypothèse que $y < z$.
Par l'absurde, nous avons bien établi que $x \neq z$

2 Compatibilité ordre et opérations

L'addition et la multiplication des réels sont compatibles avec la relation d'ordre au sens suivant :

Théorème 1.5. Soit x et y deux nombres réels. On suppose que $x < y$. Alors

- Pour tout réel $z \in \mathbb{R}$, $\quad x + z < y + z$,
- Pour tout réel strictement positif $z \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\quad x \times z < y \times z$

À partir de ce théorème, on déduit aisément que le passage aux inverses, ou encore la multiplication par un réel négatif sont également compatibles avec la relation d'ordre.

Corollaire 1.6. Pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

- Si $0 < x < y$ alors $0 < y^{-1} < x^{-1}$
- Si $\begin{cases} x \leqslant y \\ u \leqslant v \end{cases}$ alors $x + u \leqslant y + v$
- Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant 0$ alors $x \times z \geqslant y \times z$
- Si $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant u \leqslant v \end{cases}$ alors $x \times u \leqslant y \times v$

Remarque : L'ordre est entièrement compatible avec la multiplication. Cette compatibilité s'exprime différemment suivant que l'on multiplie une inégalité par un nombre positif ou négatif.

3 Droite numérique et droite numérique achevée

Considérons une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $(O, \vec{\imath})$. Chaque point M de cette droite est repéré de façon unique par son abscisse $x_M \in \mathbb{R}$. C'est l'unique nombre réel tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{\imath}$$

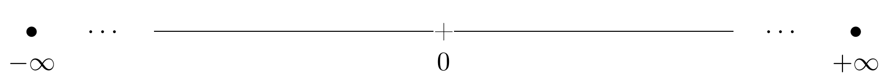
Inversement, à tout réel $x \in \mathbb{R}$ on associe son image sur la droite, le point $M(x)$ tel que

$$\overrightarrow{OM(x)} = x \cdot \vec{\imath}$$

Ainsi, il y a donc une correspondance entre les nombres réels et les points de la droite $\mathcal{D}$. Lorsqu'on identifie un réel et son image sur la droite, on parle de droite numérique.

Définition : *On appelle **droite numérique achevée**, et on note $\bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels auquel on ajoute deux éléments **non réels**, notés $+\infty$ et $-\infty$. On note aussi $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Illustration : On peut se figurer l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de la manière suivante :



On prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ à $\bar{\mathbb{R}}$ en posant :

Définition : $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *est muni d'une relation d'ordre total, notée encore $\leqslant$, définie par :*

- *Pour tout $x \in \bar{\mathbb{R}}$, $x \leqslant +\infty$,*
- *Pour tout $x \in \bar{\mathbb{R}}$, $x \geqslant -\infty$.*