Chapitre 2

Les schémas de stockage de matrices

Dans ce chapitre, on va passer en revue les différents types de matrices rencontrées en calcul matriciel. Sachant que l'opération la plus importante en calcul matriciel est la multiplication, une table de multiplications matricielle contenant presque toutes les formules des produits des différentes matrices sera un complément utile pour le calcul scientifique. On termine ce chapitre en donnant différentes fonctions de numérotations pour les différents types de matrices rencontrés en calcul scientifique. Il en existe d'autres dans [7, 25, 38]. Dans toute la suite, on désigne par $n \neq 0$ un entier naturel, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices carrées réelles d'ordre n.

2.1 Les différents types de matrices et leur produit

Matrices pleines

Une matrice pleine est de la forme : $A_p = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$.

Matrices triangulaires supérieures et inférieures

Une matrice $A_{Ts} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (respectivement $A_{Ti} \in \mathbb{R}^{n \times n}$) est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si $a_{ij} = 0 \ \forall\, i > j$ (respectivement $a_{ij} = 0 \ \forall\, i < j$). Schématiquement, ces deux matrices sont de la forme :

$$A_{Ts} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \times & \times \\ 0 & \dots & 0 & \times \end{pmatrix}. \qquad A_{Ti} = \begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & 0 \\ \times & \times & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Matrices Hessenberg supérieures et inférieures

Une matrice $A_{Hs} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (respectivement $A_{Hi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$) est dite Hessenberg supérieure (respectivement inférieure) si $a_{ij} = 0 \;\forall\, i > j+1$ (respectivement $a_{ij} = 0 \;\forall\, j > i+1$). Schématiquement, ces deux matrices sont de la forme :

$$A_{Hs} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix} \qquad A_{Hi} = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Matrices bandes

Une matrice $A_b \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite bande si $a_{ij} = 0$ pour tout i, $j = 1, \dots, n$, tel que $|i-j| > d$, où : $d = \sup\limits_{a_{ij}\neq 0} |i-j|$ est la demi largeur de bande et $D = 2d+1$ est la largeur de bande totale c'est-à-dire A_b est de la forme :

$$A_b = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Produit de deux matrices carrées réelles

De cette plate forme de matrices, on déduit une formule pour le produit C de deux matrices carrées réelles A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C = A * B$

$$\begin{cases} \forall\; i = 1, \dots, n \\ \forall\; j = \triangleright, \dots, \triangleleft \\ c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=valeur\,min}^{valeur\,max} a_{ik} * b_{kj}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans l'application de la formule (2.1), notre but est d'éviter la multiplication par des zéros, ce qui conduit à un gain de temps d'exécution. Ceci devient bénéfique pour les matrices de grande taille. Voici une table qui résume les produits de deux matrices, presque de tous les types, chaque case de la table correspond à une formule de produit matriciel du genre (2.1).

Table de multiplications matricielle

$\times$	$\mathbf{B_p}$	$\mathbf{B_{Ts}}$	$\mathbf{B_{Ti}}$	$\mathbf{B_{Hs}}$	$\mathbf{B_{Hi}}$	$\mathbf{B_{b_d}}$
A_p	$\sum_{k=1}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=1}^{j}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=j}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=1}^{\min(j+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,j-1)}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,j-d)}^{\min(j+d,n)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$
A_{Ts}	$\sum_{k=i}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=i}^{j}$ $i=1,\dots,n$ $j=i,\dots,n$	$\sum_{\max(i,j)}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=i}^{\min(j+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-1) \downarrow n$	$\sum_{\max(i,j-1)}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(i,j-d)}^{\min(j+d,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-d) \downarrow n$
A_{Ti}	$\sum_{k=1}^{i}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=1}^{\min(i,j)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=j}^{i}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,i$	$\sum_{k=1}^{\min(i,j+1)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,j-1)}^{i}$ $i=1,\dots,n$ j: $1 \downarrow \min(i+1,n)$	$\sum_{\max(1,j-d)}^{\min(i,j+d)}$ $i=1,\dots,n$ j: $1 \downarrow \min(i+d,n)$
A_{Hs}	$\sum_{k=max(1,i-1)}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,i-1)}^{j}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-1) \downarrow n$	$\sum_{\max(i-1,j)}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,i-1)}^{\min(j+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-2) \downarrow n$	$\sum_{\max(1,i-1,j-1)}^{n}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,i-1,j-d)}^{\min(j+d,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-(d+1)) \downarrow n$
A_{Hi}	$\sum_{k=1}^{\min(i+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=1}^{\min(i+1,j)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{k=j}^{\min(i+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $1 \downarrow \min(i+1,n)$	$\sum_{k=1}^{\min(i+1,j+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,j-1)}^{\min(i+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $1 \downarrow \min(i+2,n)$	$\sum_{\max(1,j-d)}^{\min(j+d,i+1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $1 \downarrow \min(i+(d+1),n)$
A_{d_1}	$\sum_{\max(1,i-d_1)}^{\min(i+d_1,n)}$ $i=1,\dots,n$ $j=1,\dots,n$	$\sum_{\max(1,i-d_1)}^{\min(j,i+d_1)}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-d_1) \downarrow n$	$\sum_{\max(j,i-d_1)}^{\min(i+d_1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $1 \downarrow \min(i+d_1,n)$	$\sum_{k=\max(1,i-d_1)}^{\min(j+1,i+d_1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-(d_1+1)) \downarrow n$	$\sum_{\max(1,j-1,i-d_1)}^{\min(i+d_1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $1 \downarrow \min(i+(d_1+1),n)$	$\sum_{\max(1,i-d_1,j-d)}^{\min(j+d,i+d_1,n)}$ $i=1,\dots,n$ j: $\max(1,i-(d_1+d)) \downarrow n$

2.2 Les Fonctions de numérotation de matrices

Dans la mise en œuvre des différents problèmes de calcul scientifique, on doit tenir compte de la spécificité de chaque méthode. On doit prendre en considération les différents types et formes de matrices. Les matrices creuses pour les méthodes itératives sont rangées ligne par ligne dans des structures skyline [**?**]. Pour les matrices symétriques, bandes et bandes symétriques, M. Benhamadou a développé, dans [7], des fonctions de numérotation bien appropriées à ces structures de données qui rangent la matrice de la méthode ligne par ligne ou colonne par colonne selon le choix de l'algorithme, elles permettent surtout de réduire l'encombrement mémoire et elles ont un accés direct. L'opération la mieux adaptée est le produit matrice vecteur. Voici ces différentes fonctions de numérotations.

Fonction de numérotation pour une matrice symétrique rangée colonne par colonne, partie inférieure

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique (${}^tA = A$), nous introduisons une fonction de numérotation Φ qui range la partie inférieure de la matrice symétrique A colonne par colonne dans un vecteur commençant par l'indice 0, comme suit. La fonction Φ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : \ [0, n-1] \times [0, n-1] & \longrightarrow & [1, NF] \\ (i, j) & \longrightarrow & \Phi(i, j) \end{array}$$

avec :

$$\Phi(i,j) = \begin{cases} \infty & \text{si} \ \ i < j \\ nj + i - \frac{j(j+1)}{2} & \text{si} \ \ i \geq j \end{cases}$$

c'est-à-dire la matrice A est rangée colonne par colonne dans un vecteur de taille $NF = \frac{n(n+1)}{2}$.
Exemple : $n = 6,\ NF = 21$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & Sym & \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{54} & a_{44} & \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \quad \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} \quad A \ = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{5,0} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{51} \\ \vdots \\ a_{44} \\ a_{54} \\ a_{55} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.2.1. *La fonction de numérotation Φ qui range la partie triangulaire inférieure de la matrice A symétrique colonne par colonne dans un vecteur commençant par l'indice* 1, *est définie par*

$$\begin{array}{rcl} \Phi \;:\; [1,n]\times[1,n] & \longrightarrow & [1,NF] \\ (i,j) & \longrightarrow & \Phi(i,j) \end{array}$$

avec

$$\Phi(i,j) = \begin{cases} \infty & si \;\; i < j \\ n*(j-1) - \frac{j*(j-1)}{2} + i & si \;\; i \geq j \end{cases} \tag{2.2}$$

c'est-à-dire, la matrice A est rangée colonne par colonne dans un vecteur dont la taille est donnée par $NF = \frac{n(n+1)}{2}$. ♢

Exemple : $n = 4 \quad NF = 10$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & SYM \\ a_{3,1} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\Phi} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{3,1} \\ a_{41} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ a_{44} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons utiliser l'une des deux fonctions de numérotation selon la spécificité de l'algorithme.

Fonction de numérotation pour une matrice bande rangée colonne par colonne

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice bande avec comme largeur de bande $D = 2d+1$, où : $d = \sup\limits_{a_{ij}\neq 0} |i-j|$, est la demi largeur de bande, nous introduisons une fonction de numérotation Φ qui range la matrice bande A dans un vecteur comme suit : La fonction Φ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi \;:\; [1,n]\times[1,n] & \longrightarrow & [1,NF] \\ (i,j) & \longrightarrow & \Phi(i,j) \end{array}$$

avec

$$\Phi(i,j) = \begin{cases} \infty & \text{si } |i-j| > d \\ \frac{j(j-1)}{2} + (j-1)d + i & \text{si } j \in [1, d+1] \\ 2d(j-1) + i - \frac{d(d-1)}{2} & \text{si } j \in [d+1, n-d+1] \\ 2d(j-1) + i - \frac{d(d-1)}{2} - \frac{(j-1+d-n)(j+d-n)}{2} & \text{si } j \in [n-d+1, n] \end{cases}$$

c'est-à-dire, la matrice A est rangée colonne par colonne dans un vecteur dont la taille est donnée par $NF = nD + \frac{1-D^2}{4}$.
Exemple : $n = 6 \quad d = 2 \quad D = 5 \quad NF = 24$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{3,5} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{4,6} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix} \quad \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{3,1} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ \vdots \\ a_{4,6} \\ a_{5,6} \\ a_{6,6} \end{pmatrix}.$$

Nous pensons que cette numérotation est un complément très utile pour ce qui a été donné dans [25] et [**?**], ce qui nous fait gagner $n^2 - NF$ mots mémoire.

Fonction de numérotation pour une matrice bande symétrique rangée colonne par colonne

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice bande symétrique dont la largeur de bande est $D = 2d+1$, où $d = \sup\limits_{a_{ij}\neq 0} |i-j|$ est la demi largeur de bande, nous introduisons une autre fonction de numérotation Ψ qui range la matrice bande symétrique A dans un vecteur comme suit : La fonction Ψ est définie par

$$\begin{array}{rcl} \Psi \ : \ [1,n]\times[1,n] & \longrightarrow & [1,NF] \\ (i,j) & \longrightarrow & \Psi(i,j) \end{array}$$

avec $\Psi(i,j) =$

$$\begin{cases} \infty & \text{si } |i-j| > d \\ (j-1)d + i & \text{si } j \in [1, n-d+1] \\ (j-1)d + i - \dfrac{(j-1+d-n)(j+d-n)}{2} & \text{si } j \in [n-d+1, n] \end{cases} \tag{2.3}$$

c'est-à-dire, la matrice A est rangée colonne par colonne dans un vecteur dont la taille est donnée par : $NF = nD + \frac{(2n-d)(d+1)}{2}$.

Exemple : $n = 6 \quad d = 1 \quad D = 3 \quad NF = 11$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ & a_{32} & a_{33} & & Sym & \\ & & a_{43} & a_{44} & & \\ & & & a_{54} & a_{55} & \\ & & & & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \quad \stackrel{\Psi}{\longrightarrow} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{55} \\ a_{6,5} \\ a_{6,6} \end{pmatrix}$$

cette numérotation nous fait gagner $n^2 - NF$ mots mémoire, en plus ce rangement colonne par colonne que nous proposons a le mérite d'être comparé au rangement ligne par ligne donné par [25] dans la mesure où il nous fait éviter les divisions ; malgrés que la seconde formule : $(j-1)d + i - \frac{(j-1+n)(j+d-n)}{2}$ semble compliquée, elle est en réalité calculée seulement pour $j \in [n-d+1, n]$ dont le nombre de termes est négligeable en comparaison avec le nombre de termes calculé par la première formule $(j-1)d+i$ pour $j \in [1, n-d+1]$.

Fonction de numérotation pour une matrice Hessenberg supérieure rangée colonne par colonne

La conservation de la forme Hessenberg supérieure par la matrice Q construite dans l'algorithme de factorisation QR [16], nous fait gagner de la place mémoire, en rangeant la matrice Q, dans un vecteur de taille $NF = \frac{n(n+1)}{2} + (n-1)$ c'est-à-dire $Q \in \mathbb{R}^{NF}$. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de Hessenberg supérieure. Nous donnons une fonction Φ de numérotation qui range dans un vecteur de taille NF, la matrice A colonne par colonne et qui peut servir notamment dans la programmation sur micro-ordinateur. En effet, considérons la fonction Φ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : \ [1,n] \times [1,n] & \longrightarrow & [1, NF] \\ (i,j) & \longrightarrow & \Phi(i,j) \end{array}$$

avec

$$\Phi(i,j) = \begin{cases} \infty & \text{si } i > j+1 \\ \frac{j(j-1)}{2} + (j-1) + i & \text{si } i \leq j+1. \end{cases}$$

Exemple : $n = 6 \quad NF = 26$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{24} & a_{26} \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & O & & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ & & & & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{1,6} \\ a_{2,6} \\ \vdots \\ a_{6,6} \end{pmatrix}.$$

Avec cette fonction de numérotation nous gagnons $\frac{n(n-1)}{2}$ mots mémoires. Le nombre d'opérations élémentaires pour cette fonction est de 5, alors que dans un stockage ligne par ligne, le nombre d'opérations élémentaires est de 8 dans [25].

Fonction de numérotation pour une matrice symétrique rangée ligne par ligne

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Nous introduisons une fonction de numérotation Φ qui range la partie triangulaire inférieure de la matrice A ligne par ligne dans un vecteur comme suit. La fonction Φ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : \ [1,n]\times[1,n] & \longrightarrow & [1,NF] \\ (i,j) & \longrightarrow & \Phi(i,j) \end{array}$$

avec

$$\Phi(i,j) = \frac{i*(i-1)}{2} + j \qquad i \geq j \tag{2.4}$$

c'est-à-dire, la matrice A est rangée ligne par ligne dans un vecteur dont la taille est donnée par : $NF = \frac{n(n+1)}{2}$.
Exemple : $n = 4 \quad NF = 10$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & SYM \\ a_{3,1} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\Phi} \quad A \ = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{41} \\ \vdots \\ a_{44} \end{pmatrix}.$$

Fonction de numérotation pour une matrice symétrique rangée colonne par colonne, partie supérieure

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Nous introduisons une fonction de numérotation Φ qui range la partie triangulaire supérieure de la matrice A colonne par colonne dans un vecteur comme suit. La fonction Φ est définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : \ [1,n]\times[1,n] & \longrightarrow & [1,NF] \\ (i,j) & \longrightarrow & \Phi(i,j) \end{array}$$

avec

$$\Phi(i,j) = \begin{cases} \infty & \text{si } i > j \\ \frac{n(n+1)}{2} + i & \text{si } i \leq j \end{cases} \tag{2.5}$$

c'est-à-dire, la matrice A est rangée colonne par colonne dans un vecteur dont la taille est donnée par : $NF = \frac{n(n+1)}{2}$.