ANALYSE RÉELLE
ET COMPLEXE

ANALYSE RÉELLE ET COMPLEXE

Cours et exercices

Walter Rudin
Professeur à l'Université du Wisconsin (Madison)

Traduit de l'américain par
Jean Dhombres
Professeur à l'Université de Nantes

DUNOD

L'édition originale de cet ouvrage a été publiée
aux États-Unis chez McGraw-Hill sous le titre

Read and complex Analysis. Third Edition.

11 rue Paul Bert 92240 Malakoff
ISBN 9978-2-10-082054-2

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

En choisissant de mettre l'accent sur les connexions entre les différents domaines de l'Analyse, ce livre présente les techniques de base et les théorèmes fondamentaux pouvant constituer la matière d'une première année d'un cours avancé (licence ou maîtrise). Les deux domaines traditionnellement disjoints de l'analyse réelle et de l'analyse complexe sont ici réunis, et sont aussi abordées quelques-unes des idées qui fondent l'analyse fonctionnelle.

Voici quelques exemples de la manière dont ces liaisons sont démontrées et exploitées. Le théorème de représentation de Riesz et le théorème de Hahn-Banach permettent de « deviner » la formule intégrale de Poisson ; ils sont alors appariés pour la démonstration du théorème de Runge, puis combinés au théorème de Blaschke sur les zéros des fonctions holomorphes bornées afin d'aboutir au théorème de Müntz-Szasz sur l'approximation des fonctions sur un intervalle. Que L^2 soit un espace de Hilbert sert dans la preuve du théorème de Radon-Nikodym ; ce théorème conduit à celui de différentiation des intégrales définies et, à son tour, ce dernier fournit l'existence de limites radiales pour les fonctions harmoniques bornées. Les théorèmes de Plancherel et de Cauchy se conjuguent pour donner le théorème de Paley et Wiener, lequel est à son tour utilisé pour le théorème de Denjoy-Carleman sur les fonctions indéfiniment différentiables sur l'axe réel. Le théorème du maximum fournit des informations quant aux opérateurs linéaires sur les espaces L^p.

Je n'ai pas cherché à indiquer la genèse de chaque rubrique dans la mesure où les résultats sont classiques ; l'innovation provient d'un effet de présentation et des démonstrations originales. Des références sont introduites par les Notes ; elles ne renvoient pas toujours aux sources originales, mais plus souvent à des travaux récents où l'on pourra trouver des références plus complètes. En aucun cas cependant une absence de référence ne saurait signifier une prétention d'originalité de ma part.

Les connaissances requises pour l'utilisation de cet ouvrage se trouvent dans tout bon cours d'initiation au calcul différentiel et intégral (maniement des opérations de la théorie des ensembles, espaces métriques, continuité uniforme et convergence uniforme). Les sept premiers chapitres de mon précédent ouvrage, les *Principes de l'Analyse mathématique* fournissent une préparation suffisante[1].

L'expérience tirée de la première édition établit qu'une étude des quinze premiers chapitres occupe deux semestres d'une première année de second cycle, chapitres auxquels peuvent s'ajouter un ou deux sujets choisis dans les cinq chapitres restants. Toutefois, les quinze

1. L'équivalent français pourrait être le livre de Jacques Dixmier, *Cours de mathématiques du Ier cycle*, 2 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1967 ; ou celui de Jean Dieudonné, *Fondements de l'Analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1967 (N.d.t.).

premiers chapitres doivent être abordés dans l'ordre indiqué, à l'exception du chapitre 9 que l'on peut repousser à plus tard.

La différence la plus nette entre la troisième édition et les précédentes porte sur le tout nouveau chapitre consacré à la différentiation. Les faits fondamentaux de la différentiation sont désormais déduits de l'existence de points de Lebesgue, et celle-ci provient à son tour d'une inégalité dite de type faible, satisfaite par les fonctions maximales pour les mesures sur les espaces euclidiens. Cette façon de faire fournit des théorèmes puissants au prix d'un effort minimal. Plus important encore est le fait que le lecteur peut ainsi se familiariser avec les fonctions maximales qui prouvent toujours et de plus en plus leur utilité dans plusieurs domaines de l'Analyse.

L'un d'entre eux est l'étude du comportement des intégrales de Poisson. Un autre concerne les espaces H^p. De sorte que de grandes parties des chapitres 11 et 17 ont été réécrites et sont ainsi, du moins je l'espère, simplifiées.

Dans le but d'améliorer certaines questions de détail, j'ai également effectué plusieurs changements mineurs. Par exemple, des parties du chapitre 4 ont été simplifiées. Les notions d'équicontinuité et de convergence faible sont présentées avec plus de précision, et le comportement à la frontière des applications conformes est étudié au moyen du théorème de Lindelöf sur les valeurs asymptotiques des fonctions holomorphes bornées du disque.

Au cours des vingt dernières années, de nombreux collègues et étudiants m'ont fait part de leurs commentaires sur le contenu de ce livre, et j'ai sincèrement apprécié leurs critiques dont je me suis efforcé de tenir compte autant que faire se pouvait. En ce qui concerne la présente édition, mes remerciements vont à Richard Rochberg pour quelques suggestions utiles de dernière minute, et je remercie particulièrement Robert Burckel pour le soin avec lequel il a minutieusement examiné tout le manuscrit.

Walter Rudin

AVERTISSEMENT

La troisième édition du livre de Walter Rudin comporte vingt chapitres d'un volume à peu près égal, divisés en sections, les théorèmes étant numérotés par chapitre. Les notes historiques rédigées par le traducteur reprennent les commentaires fournis dans l'édition originale, généralement des références à des ouvrages classiques, ou à des articles spécialisés et courts dont certains exercices sont tirés, voire à certains articles qui ont permis des améliorations aux démonstrations des éditions antérieures de *Real and Complex Analysis*. Une histoire des principales notions développées est en outre fournie, avec quelques références bibliographiques complémentaires en fin de note. Il ne saurait s'agir d'une histoire des mathématiques, les indications sont volontairement succinctes et toute biographie est omise ; il ne s'agit pas plus d'ajouter des matériaux mathématiques qui n'ont pas été discutés dans le livre de Rudin.

Si viennent ensuite des extraits (aussi peu coupés que possible) de textes du XIX^e et surtout du XX^e siècle, au besoin traduits en français, ce n'est pas pour doubler les résultats du cours. On entend offrir d'autres manières de faire, pour aider le lecteur à penser les objectifs des mathématiques développées dans chaque chapitre. Il n'a pas été tenté de « corriger » certains de ces textes afin de les mettre à l'unisson du style de rigueur et d'économie adopté par Rudin. À titre d'exercice, le lecteur pourra s'y essayer. Quoique choisis d'un niveau analogue, ces textes historiques ne sont pas des conséquences du cours et ils requièrent une attention propre ; en effet, ils proviennent d'autres architectures mathématiques, quelquefois en pleine ébauche. Mais ces textes ne disent pas toute l'histoire. Orthographe, ponctuation, et notations originales sont conservées, sauf lorsqu'il y a risque de confusion ou d'incompréhension ; quelques notes explicatives viennent en plus des notes originales. On a tenu à conserver toutes les références qui figurent dans ces extraits afin de donner à voir une mathématique en train de se faire, et quelquefois les hésitations quant aux choses les plus importantes (cependant, pour faciliter la lecture, ces références sont complétées et standardisées, avec des renvois au livre de Rudin).

Une liste des symboles particuliers se trouve en fin d'ouvrage. Dans le texte, un nom entre crochets, suivi d'une date, par exemple [Rudin, 1976], renvoie à la bibliographie générale (en l'occurrence au livre de W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, paru dans sa troisième édition en 1976). Une bibliographie « historique » fournit des titres de livres qui peuvent être consultés sans plus de connaissances que le livre de Rudin n'en requiert ; la référence à cette liste est celle des références ordinaires, le nom de l'auteur étant alors mis en italique (ainsi, [*Borel*, 1898/1950]).

Jean Dhombres

PROLOGUE

LA FONCTION EXPONENTIELLE

C'est la fonction la plus importante en mathématiques. Elle est définie pour tout nombre complexe z par la formule

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1}$$

La série (1) est absolument convergente pour tout z, et est uniformément convergente sur tout sous-ensemble borné du plan complexe. Il en résulte que la fonction exponentielle est continue. L'absolue convergence justifie le calcul suivant,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Ce qui donne la formule importante d'addition

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b), \tag{2}$$

valable pour tous nombres complexes a et b. Nous définissons le nombre e (un nombre réel) comme étant exp (1), et nous remplacerons couramment $\exp(z)$ par l'habituelle notation plus courte e^z. Remarquons d'après (1) que $\exp(0) = 1$.

Théorème.

(a) pour tout nombre complexe z, on a $e^z \neq 0$.

(b) la fonction exponentielle est sa propre dérivée : $\exp'(z) = \exp(z)$.

(c) la restriction de la fonction exponentielle à l'axe réel est une fonction positive strictement croissante et

$$e^x \to \infty \text{ quand } x \to \infty, \qquad e^x \to 0 \text{ quand } x \to -\infty.$$

(d) il existe un nombre positif π tel que $e^{\pi i/2} = i$ et tel que $e^z = 1$ si et seulement si $z/2\pi i$ est un entier relatif.

(e) la fonction exponentielle est périodique, de période $2\pi i$.

(f) l'application $t \to e^{it}$ est une surjection de l'axe réel sur le cercle unité.

(g) pour tout nombre complexe $w \neq 0$, il existe un nombre complexe z tel que $w = e^z$.

DÉMONSTRATION. — D'après (2), $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, ce qui entraîne ($a$). Puis,

$$\exp'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(z).$$

La première des égalités précédentes est une définition, la deuxième résulte de (2), et la troisième de (1), ce qui démontre (*b*).

Il est clair, d'après (1), que la fonction exponentielle est strictement croissante sur l'axe réel positif et que $e^x \to \infty$ quand $x \to \infty$. Les autres assertions de (*c*) résultent de l'égalité $e^x e^{-x} = 1$.

Pour tout nombre réel t, la série (1) montre que e^{-it} est le conjugué de e^{it}. D'où

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1,$$

c'est-à-dire

$$|e^{it}| = 1 \qquad (t \text{ réel}). \tag{3}$$

En d'autres termes, si t est réel, e^{it} appartient au cercle unité. On définit $\cos t$ et $\sin t$ comme étant les parties réelle et imaginaire de e^{it} :

$$\cos t = \mathrm{Re}[e^{it}], \qquad \sin t = \mathrm{Im}[e^{it}] \qquad (t \text{ réel}). \tag{4}$$

En dérivant les deux termes de l'identité d'Euler

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \tag{5}$$

équivalente à (4), et en appliquant (b) on obtient :

$$\cos' t + i \sin' t = i e^{it} = -\sin t + i \cos t,$$

de telle sorte que

$$\cos' t = -\sin t, \qquad \sin' t = \cos t. \tag{6}$$

La série entière (1) fournit la représentation en série entière de $\cos t$ selon :

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \,. \tag{7}$$

Pour $t = 2$, la série (7) est une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue (à partir du second terme). Par suite, cos 2 est inférieur à la somme des trois premiers termes de (7), où $t = 2$; c'est-à-dire $\cos 2 < -\frac{1}{3}$. Puisque $\cos 0 = 1$ et la fonction cosinus, à valeurs réelles, étant continue sur l'axe réel, il existe un plus petit nombre positif t_0 pour lequel $\cos t_0 = 0$ et l'on pose par définition

$$\pi = 2t_0 \tag{8}$$

Il résulte de (3) et de (5) que $\sin t_0 = \pm 1$. Puisque $\sin' t = \cos t > 0$ sur le segment $[0, t_0]$ et $\sin 0 = 0$, on a $\sin t_0 > 0$, d'où $\sin t_0 = 1$, et ainsi

$$e^{\pi i/2} = i. \tag{9}$$

Par suite $e^{\pi i} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$, et $e^{2\pi i n} = 1$ pour tout entier relatif n. La relation (*e*) s'en déduit immédiatement :

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z. \tag{10}$$

Avec $z = x + iy$ et y étant réels, $e^z = e^x e^{iy}$. D'où, $|e^z| = e^x$. Si $e^z = 1$, il faut que $e^x = 1$, de sorte que $x = 0$; pour prouver que $y/2\pi$ doit être entier, il suffit d'après (10) de montrer que $e^{iy} \neq 1$ pour $0 < y < 2\pi$.

Supposons $0 < y < 2\pi$ et

$$e^{iy/4} = u + iv \qquad (u \text{ et } v \text{ réels}). \tag{11}$$

Puisque $0 < \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$, on a $u > 0$ et $v > 0$ et aussi

$$e^{iy} = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2). \tag{12}$$

Le membre de droite de (12) ne peut être réel que si $u^2 = v^2$; comme $u^2 + v^2 = 1$, ceci se produit seulement pour $u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$, et ainsi (12) montre que $e^{iy} = -1 \neq 1$, ce qui achève la démonstration de (*d*).

Nous savons déjà que l'application $t \to e^{it}$ envoie tout nombre réel sur un nombre complexe du cercle unité. Pour démontrer (*f*), soit w tel que $|w| = 1$; nous allons montrer que $w = e^{it}$ pour au moins un réel t. Écrivons $w = u + iv$, u et v réels, et supposons d'abord $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Puisque $u \leq 1$, la définition de π montre qu'il existe un nombre t, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, tel que $\cos t = u$; d'où $\sin^2 t = 1 - u^2 = v^2$; or pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin t \geq 0$, d'où $\sin t = v$. On a ainsi $w = e^{it}$.

Si $u < 0$ et $v \geq 0$, les conditions précédentes sont satisfaites par $-iw$. Donc $-iw = e^{it}$ pour au moins un réel t et $w = e^{i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$. Enfin, si $v < 0$, les deux cas précédents montrent que $-w = e^{it}$ pour un t réel, d'où $w = e^{i(t+\pi)}$, ce qui termine la démonstration de (*f*).

Si $w \neq 0$, posons $\alpha = \frac{w}{|w|}$. Alors $w = |w|\alpha$; d'après (*c*), il existe un x réel tel que $|w| = e^x$. Puisque $|\alpha| = 1$, (*f*) montre que $\alpha = e^{iy}$ pour un y réel. D'où $w = e^{x+iy}$, ce qui démontre la dernière assertion du théorème.

Nous rencontrerons l'intégrale de $(1 + x^2)^{-1}$ prise sur tout l'axe réel. Pour l'évaluer, posons $\varphi(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$ où $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'après (6), $\varphi' = 1 + \varphi^2$. Donc φ est une fonction strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varphi'(t)\,dt}{1 + \varphi^2(t)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi.$$

NOTES HISTORIQUES

La fonction exponentielle fait une apparition relativement tardive dans les traités mathématiques. En 1748, dans son *Introduction à l'analyse des infinis*, Leonhard Euler la définit par monotonie pour toutes les valeurs réelles à partir d'abord des valeurs de a^n, pour n entier et $a > 0$, puis pour un nombre rationnel n quelconque. Par une interprétation hardie de la dérivée de la fonction exponentielle à l'origine, privilégiant pour simplifier e^x, il déduit ensuite que cette dernière fonction s'obtient comme limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ lorsque l'entier n tend vers l'infini. Par une utilisation non moins hardie du développement du binôme de Newton, il fournit le développement en série entière

$$\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}.$$

Toujours soucieux de données numériques, il calcule e avec vingt-quatre décimales

$$e = 2,718281828459045323536028.$$

Passant aux valeurs complexes de la variable dans la série ci-dessus — c'est bien sûr la série (1) du prologue —, Euler obtient les formules qui portent aujourd'hui son nom ; elles réduisent les fonctions trigonométriques à la seule exponentielle, mais attestent la possible autonomie de l'analyse par rapport à la géométrie :

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= e^{x}(\cos y + i \sin y) ; \\ \cos y &= \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) ; \\ \sin y &= \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}). \end{aligned}$$

Accompagnée de l'importante surjection de l'axe réel sur le cercle unité grâce à la fonction exponentielle, la construction purement analytique du nombre π que fournit le prologue apparaît dans les traités mathématiques de la fin du XIX^e siècle. Dans leur présentation de la théorie des fonctions d'une variable complexe [Saks, Zygmund, 1952], [Cartan, 1962], puis [Ahlfors, 2e édition, 1966, pp. 43-48] la reprennent, affectant de ne dresser aucune figure.

Euler innovait aussi en construisant le logarithme d'un nombre positif par inversion de la fonction exponentielle réelle qui est strictement croissante. Première fonction transcendante reconnue, le logarithme avait été découvert par Napier au tout début du XVIIe siècle. Après l'invention du calcul intégral et à partir des années 1690, le logarithme était présenté comme primitive de la fonction $\frac{1}{x}$, et l'exponentielle de base e s'en déduisait, constatée comme fonction égale à sa dérivée. Toutefois, en 1647, Grégoire de Saint-Vincent avait su donner une définition géométrique de la fonction exponentielle de base quelconque en utilisant les aires que l'hyperbole découpe dans un système de référence constitué par des parallèles à ses asymptotes.

RÉFÉRENCE

Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748 ; *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, t. VIII, chap. VII (et t. IX), B.G. Teubner, Leipzig, 1922 et 1945 ; traduction française de J.B. Labey, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, Paris, 1796 (réédition, Paris, ACL, 1985).

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE ABSTRAITE DE L'INTÉGRATION

Vers la fin du XIXe siècle, beaucoup de mathématiciens comprirent que l'intégrale de Riemann, actuellement enseignée dès l'initiation aux mathématiques supérieures, devait être remplacée par quelque autre type d'intégrale, tout à la fois plus souple, plus général et mieux adapté aux passages à la limite. Les tentatives les plus notables sont dues à C. Jordan, E. Borel, W.H. Young et H. Lebesgue. Ce dernier obtint la construction qui s'avéra la plus réussie.

En bref, l'idée essentielle est la suivante : l'intégrale de Riemann d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ peut être approchée par des sommes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)m(E_i)$$

où $E_1, E_2, ..., E_n$ sont des intervalles disjoints dont la réunion est l'intervalle $[a, b]$. La longueur de E_i pour i variant de 1 à n est notée $m(E_i)$ et t_i appartient à E_i. Lebesgue découvrit qu'on obtiendrait une théorie tout à fait satisfaisante de l'intégration en autorisant les ensembles précédents à appartenir à une classe plus vaste de sous-ensembles de la droite réelle, sous-ensembles que nous allons appeler les « ensembles mesurables ». De même, on doit élargir la classe des fonctions utilisées jusqu'aux fonctions dites « mesurables ». Du point de vue ensembliste, les propriétés cruciales sont la stabilité de la mesurabilité par réunion et intersection d'une famille dénombrable quelconque d'ensembles mesurables, ainsi que la stabilité par passage au complémentaire. En outre, et c'est le plus important, la notion de « longueur », désormais appelée « mesure », peut être étendue à la nouvelle classe de telle sorte que pour toute famille dénombrable $\{E_i\}$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints

$$m(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ...) = m(E_1) + m(E_2) + m(E_3) + ...$$

On qualifie d'*additivité dénombrable* cette dernière propriété.

On utilise alors un procédé de complétion pour achever le passage de la théorie de l'intégration de Riemann à celle de Lebesgue. L'importance de ce procédé, qui sera précisé par la suite, est aussi grande, en Analyse, que la construction du système des nombres réels à partir des nombres rationnels au moyen des suites de Cauchy.

Bien sûr, la mesure m ci-dessus est intimement liée à la géométrie de la droite réelle. Dans ce chapitre, nous présentons une version abstraite (c'est-à-dire axiomatique) de l'intégrale de Lebesgue, relative à une quelconque mesure dénombrablement additive sur un ensemble *quelconque*. Les définitions précises sont fournies dans ce chapitre. En fait, la théorie abstraite ne présente pas de difficultés plus grandes que la théorie particulière de la droite réelle, ce qui montre que pour l'essentiel la théorie de l'intégration ne dépend pas de la géométrie (ou de la topologie) de l'espace sous-jacent. Bien plus, on obtient ainsi un outil dont le domaine d'application est beaucoup plus vaste. L'existence d'une classe assez importante de mesures, notamment la mesure de Lebesgue, sera établie au chapitre 2.

NOTATIONS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET TERMINOLOGIE

1.1. Certains ensembles peuvent être décrits en exhibant leurs éléments. Ainsi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est l'ensemble dont les éléments sont $x_1, x_2, ..., x_n$ et en particulier $\{x\}$ désigne l'ensemble dont l'unique élément est x. Plus fréquemment, un ensemble est défini à partir d'une propriété. Nous écrivons

$$\{x : P\}$$

pour désigner l'ensemble des éléments x ayant la propriété P. L'ensemble vide est noté par le symbole $\emptyset$. Nous utiliserons de façon synonyme les mots *collection, famille, classe,* ou *ensemble.*

Nous écrivons $x \in A$ pour dire que x est un élément de A, et, dans le cas contraire, nous notons $x \notin A$. Si B est un sous-ensemble de A, c'est-à-dire si $x \in B$ implique $x \in A$, nous écrivons $B \subset A$. Les inclusions simultanées $A \subset B$ et $B \subset A$ signifient $A = B$. Si $B \subset A$ et toutefois $A \neq B$, on dit que B est un sous-ensemble *propre* de A. Notons l'inclusion $\emptyset \subset A$ pour tout ensemble A.

$A \cup B$ et $A \cap B$ désignent respectivement la réunion et l'intersection des ensembles A et B. Si $\{A_\alpha\}$ est une collection d'ensembles décrite par un indice α qui parcourt un ensemble I, nous écrivons

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{et} \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

pour la réunion et pour l'intersection des $\{A_\alpha\}$:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ pour au moins un } \alpha \in I\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ pour tout } \alpha \in I\}.$$

Lorsque l'ensemble d'indices I est l'ensemble des entiers naturels, les notations familières sont

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Lorsque deux ensembles distincts de la collection $\{A_\alpha\}$ n'ont aucun élément commun, on dit que $\{A_\alpha\}$ est une *collection d'ensembles disjoints.*

Nous écrivons $A - B = \{x : x \in A \,;\, x \notin B\}$ et lorsque le contexte rend suffisamment clair l'ensemble plus grand par rapport auquel on prend le complémentaire, nous notons ce dernier par A^c.

Le *produit cartésien* $A_1 \times ... \times A_n$ des ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ est l'ensemble des n-uplets ordonnés $(a_1, ..., a_n)$ où $a_i \in A_i$ pour $i = 1, ..., n$.

La *droite réelle*, c'est-à-dire le système des nombres réels, est notée R^1 et

$$R^k = R^1 \times ... \times R^1 \ (k \text{ facteurs}).$$

La *droite réelle achevée* est l'ensemble R^1 auquel on a adjoint deux symboles, ∞ et $-\infty$, avec l'ordre évident. Si $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, le *segment* $[a, b]$ et l'*intervalle* $]a,b[$ sont définis par

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\} ; \quad]a, b[= \{x : a < x < b\}.$$

Nous écrivons en outre

$$[a, b[= \{x : a \leq x < b\};] a, b] = \{x : a < x \leq b\}.$$

Pour tout sous-ensemble E non vide de la droite réelle achevée, la borne inférieure et la borne supérieure de E sont des éléments de $[-\infty, \infty]$, notés respectivement sup E et inf E.

Quelquefois, mais seulement lorsque la borne supérieure de E est un élément de E, nous notons max E pour sup E (et respectivement min E pour inf E).

Le symbole

$$f : X \to Y$$

signifie que f est une *fonction* (de façon synonyme, une *application* ou une *transformation*) de l'ensemble X dans l'ensemble Y; c'est dire que f attribue à chaque $x \in X$ un élément $f(x)$ appartenant à l'ensemble Y. Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, l'*image* de A et l'*image inverse* de B sont les ensembles définis par :

$$f(A) = \{y : y = f(x) \text{ pour au moins un } x \text{ dans } A\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}.$$

Il faut se souvenir que $f^{-1}(B)$ peut être vide quand bien même $B \neq \emptyset$.

Le *domaine* de f est X et l'*image* de f est $f(X)$.

Si $f(X) = Y$, on dit que f est une application de X *sur* Y, ou une application *surjective*.

Pour tout $y \in Y$, nous écrivons $f^{-1}(y)$ à la place de $f^{-1}(\{y\})$. Lorsque ce dernier ensemble possède au plus un point, la fonction est dite *injective*. Dans ce cas, f^{-1} est une fonction, dont le domaine est $f(X)$ et l'image X.

Lorsque $f : X \to [-\infty,\infty]$ et $E \subset X$, l'usage est de noter $\sup f(x)$ plutôt que $\sup f(E)$.

Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, la *fonction composée* $gof : X \to Z$ est définie par

$$(gof)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in X).$$

Si l'image de f appartient à la droite réelle (ou au plan complexe), on dit que f est une *fonction réelle* ou à valeurs réelles (respectivement une *fonction complexe* ou à valeurs complexes). Pour une fonction à valeurs complexes, dire « $f \geq 0$ » signifie que toutes les valeurs $f(x)$ de f sont des nombres réels non négatifs.

NOTION DE MESURABILITÉ

La classe des fonctions mesurables joue un rôle prééminent en théorie de l'intégration. Elle possède quelques propriétés de base en commun avec une autre famille importante de fonctions, les fonctions continues. Il peut être utile de garder ces similitudes présentes à l'esprit. Notre présentation est organisée de façon à mettre en évidence les analogies entre *espace topologique, ensemble ouvert*, et *fonction continue* d'une part, *espace mesurable, ensemble mesurable* et *fonction mesurable* d'autre part. Le lien entre ces notions apparaît plus clairement, semble-t-il, lorsque la présentation est suffisamment abstraite et ceci justifie mieux notre approche du sujet que la seule recherche de la généralité en soi.

1.2. Définition

(*a*) Une collection τ de sous-ensembles d'un ensemble X constitue par définition une *topologie sur* X lorsque τ satisfait les trois propriétés suivantes

(i) $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$
(ii) Si $V_i \in \tau$ pour $i = 1, \ldots, n$, alors $V_1 \cap V_2 \ldots \cap V_n \in \tau$
(iii) Si $\{V_\alpha\}$ est une sous-collection arbitraire d'éléments appartenant à τ (collection finie, dénombrable ou non dénombrable), alors $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

(*b*) Si τ est une topologie sur X, on dit que X est un *espace topologique* et les éléments de τ sont appelés les *(ensembles) ouverts* de X.

(*c*) Si X et Y sont des espaces topologiques et f une application de X dans Y, on dit que f est *continue* lorsque $f^{-1}(V)$ est un ensemble ouvert dans X pour tout ouvert V de Y.

1.3. Définition

(*a*) Une famille $\mathcal{M}$ de sous-ensembles d'un ensemble X constitue une *σ-algèbre sur* X lorsque $\mathcal{M}$ satisfait les trois propriétés suivantes

(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) Si $A \in \mathcal{M}$, alors $A^c \in \mathcal{M}$ où A^c désigne le complémentaire de A par rapport à l'ensemble X.
(iii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et si $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, alors $A \in \mathcal{M}$.

(*b*) Lorsque $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre sur X, on dit que X est un *espace mesurable* et les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les *ensembles mesurables* de X.

(*c*) Lorsque X est un espace mesurable, Y est un espace topologique et f une application de X dans Y, f est dite *mesurable* dès que $f^{-1}(V)$ est un ensemble mesurable pour tout V ouvert dans Y.

Il serait sans doute plus satisfaisant de réserver le terme « espace mesurable » au couple ordonné $(X, \mathcal{M})$ plutôt qu'au seul espace X. Ce dernier, après tout, ne change pas du fait que l'on adopte une σ-algèbre particulière. De façon analogue, un espace topologique est un couple ordonné (X, τ). Une attitude aussi minutieuse pour toute la mathématique rendrait la terminologie fort lourde. Nous reprendrons d'ailleurs ces considérations en 1.21.

1.4. Commentaires sur la définition 1.2. — Les espaces topologiques les plus familiers sont les *espaces métriques*. Nous supposons que le lecteur les connaît déjà, mais par souci encyclopédique, nous allons donner les définitions fondamentales.

Un *espace métrique* est un ensemble X sur lequel est défini une *fonction distance (ou métrique)* ϱ possédant les propriétés suivantes :

(*a*) $0 \le \varrho(x, y) < \infty$ pour tous x et y dans X,
(*b*) $\varrho(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
(*c*) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pour tous x et y dans X,
(*d*) $\varrho(x, y) \le \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ pour tous x, y, z dans X.

La quatrième propriété est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*.

Si $x \in X$ et $r \ge 0$, la *boule ouverte* de centre x et de rayon r est l'ensemble $\{y \in X : \varrho(x, y) < r\}$.

Sur un espace métrique X, la famille τ des ensembles $E \subset X$ qui sont obtenus comme réunion (arbitraire) de boules ouvertes, constitue une topologie sur X. Il n'est pas difficile de le vérifier : la propriété d'intersection tient à ce que si $x \in B_1 \cap B_2$ où B_1 et B_2 sont des boules ouvertes, x est centre d'une boule ouverte B encore incluse dans $B_1 \cap B_2$. Ce que nous laissons à titre d'exercice.

Par exemple, sur la droite réelle R^1, un ensemble est ouvert si et seulement s'il est la réunion d'intervalles ouverts $]a, b[$. Dans le plan R^2, les ouverts sont réunions de disques ouverts.

Un autre espace topologique que nous rencontrerons souvent est la droite réelle achevée $[-\infty, \infty]$ dont la topologie est définie par la description de ses ouverts qui sont les ensembles $]a, b[$, $[-\infty, a[$, $]a, \infty]$ et toute réunion de segments de ces trois types.

La définition de la continuité donnée au paragraphe 1.2 (*c*) est globale. Il est fréquemment utile de définir une continuité locale. Définissons d'abord un *voisinage* d'un point x comme un ensemble contenant un ouvert contenant le point x. Une application f de X dans X est dite *continue au point* $x_0 \in X$ si à tout voisinage V de $f(x_0)$ correspond un voisinage W de x_0 tel que $f(W) \subset V$.

Pour les espaces métriques, cette définition locale de la continuité en un point est évidemment équivalente à la définition classique utilisant ε et δ et elle équivaut encore à l'implication $\lim x_n = x_0$ dans X entraîne $\lim f(x_n) = f(x_0)$ dans Y.

Comme on s'y attend, on peut facilement relier la définition globale et la définition locale de la continuité :

1.5. Proposition. — *Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application f de X dans Y est continue si et seulement si f est continue en chaque point de X.*

DÉMONSTRATION. — Lorsque f est continue et pour $x_0 \in X$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 pour tout voisinage V *de* $f(x_0)$. *Puisque* $f(f^{-1}(V)) \subset V$, on déduit la continuité de f en x_0.

Lorsque f est continue en tout point de X, prenons un ouvert V dans Y. Tout point x appartenant à $f^{-1}(V)$ possède un voisinage W_x tel que $f(W_x) \subset V$. Ainsi, $W_x \subset f^{-1}(V)$. Il s'ensuit que $f^{-1}(V)$ est une réunion d'ensembles ouverts, donc est lui-même un sous-ensemble ouvert. Ce qui assure la continuité de la fonction f.

1.6. Commentaires sur la définition 1.3. — Soit $\mathcal{M}$ une σ-algèbre sur un ensemble X. Grâce aux propriétés de la définition (i) à (iii) 1.3 (*a*) nous pouvons déduire immédiatement les résultats suivants.

(*a*) Puisque $\emptyset = X^c$, (i) et (ii) entraînent $\emptyset \in \mathcal{M}$.

(*b*) Posant $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ dans (iii), nous constatons que $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{M}$ si $A_i \in \mathcal{M}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

(*c*) Puisque

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c,$$

$\mathcal{M}$ est stable par intersection finie ou dénombrable.

(*d*) Puisque $A - B = A \cap B^c$, $A - B \in \mathcal{M}$ lorsque $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{M}$.

Le préfixe σ fait référence au fait que (iii) est licite pour les réunions *dénombrables* d'ensembles de $\mathcal{M}$. Lorsque (iii) a seulement lieu pour les réunions finies, on dit que $\mathcal{M}$ est une *algèbre* d'ensembles.

1.7. Théorème

Soient Y et Z deux espaces topologiques et soit $g : Y \to Z$ une application continue.

(a) Si X est un espace topologique, si $f: X \to Y$ est continue, et si $h = gof$, la fonction $h : X \to Z$ est continue.

(b) Si X est un espace mesurable, si $f: X \to Y$ est mesurable, et si $h = gof$, $h : X \to Z$ est mesurable.

En bref, les fonctions continues de fonctions continues sont continues, et de même les fonctions continues de fonctions mesurables sont mesurables.

DÉMONSTRATION. — Si V est ouvert dans Z, $g^{-1}(V)$ est ouvert dans Y et

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

Si f est continue, on déduit que $h^{-1}(V)$ est ouvert, ce qui implique (a).

Si f est mesurable, on déduit que $h^{-1}(V)$ est mesurable, ce qui implique (b).

1.8. Théorème

Soient u et v deux fonctions mesurables et à valeurs réelles définies sur un espace mesurable X, soit Φ une application continue, définie sur le plan R^2 et à valeurs dans un espace topologique Y. On définit pour tout x dans X la fonction h par

$$h(x) = \Phi\,(u(x),\ v(x)).$$

Alors $h : X \to Y$ est mesurable.

DÉMONSTRATION. — Posons $f(x) = (u(x), v(x))$. Alors f envoie X dans le plan, et puisque $h = \Phi o f$, le théorème 1.7. montre qu'il suffit d'établir la mesurabilité de f.

Désignons par R un rectangle ouvert du plan dont les côtés sont parallèles aux axes, c'est-à-dire le produit cartésien de deux ouverts I_1 et I_2. On vérifie

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2),$$

donc que $f^{-1}(R)$ est mesurable grâce à l'hypothèse sur u et v. Tout ensemble ouvert V du plan étant réunion dénombrable de tels rectangles R_i et puisque

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i),$$

on constate que $f^{-1}(V)$ est mesurable.

1.9. Soit X un espace mesurable. Les propositions suivantes proviennent des théorèmes 1.7. et 1.8.

(a) Si $f = u + iv$, pour des fonctions mesurables réelles u et v sur X, la fonction f est une fonction mesurable complexe sur X.

Cela résulte du théorème 1.8, avec $\Phi(z) = z$.

(b) Pour une fonction $f = u + iv$, mesurable sur un espace X et complexe, les fonctions u, v, et $|f|$ sont des fonctions mesurables réelles.

Il suffit d'appliquer le théorème 1.7. avec $g(z) = Re(z)$, ou bien $Im(z)$, ou encore $|z|$.

(*c*) *Pour des fonctions mesurables et complexes f et g, définies sur un espace mesurable X, les fonctions $f+g$ et fg sont également mesurables.*

Pour des fonctions réelles, le résultat provient du théorème 1.8. grâce aux fonctions $\Phi(s, t) = s+t$ ou $\Phi(s, t) = st$. Le cas complexe provient alors de (*a*) et (*b*).

(*d*) *Soit E un ensemble mesurable de X et posons*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

alors χ_E est une fonction mesurable.

Ce résultat est évident. La fonction χ_E est la *fonction caractéristique* de l'ensemble E et tout au long de ce livre nous réservons la lettre χ pour désigner les fonctions caractéristiques.

(*e*) *Soit f une fonction mesurable complexe définie sur X. Il existe une fonction mesurable complexe α sur X telle que $|\alpha| = 1$ et $f = \alpha|f|$.*

DÉMONSTRATION. — Posons $E = \{x : f(x) = 0\}$ et prenons pour ensemble Y le plan complexe privé de l'origine et muni de la topologie induite. Sur Y, nous définissons la fonction $\varphi(z) = \dfrac{z}{|z|}$ et posons pour tout x dans X,

$$\alpha(x) = \varphi(f(x)) + \chi_E(x).$$

Si $x \in E$, $\alpha(x) = 1$, et si $x \notin E$, $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$. Puisque φ est continue sur Y et puisque E est mesurable (le vérifier), la mesurabilité de α provient de (*c*), de (*d*) et du théorème **1.7.**

Montrons maintenant que les σ-algèbres existent à profusion.

1.10. Théorème

Soit $\mathcal{F}$ une collection quelconque de sous-ensembles de X. Il existe une plus petite σ-algèbre $\mathcal{M}^*$ dans X contenant la famille $\mathcal{F}$.

On dit quelquefois que $\mathcal{M}^*$ est la σ-algèbre engendrée par la famille $\mathcal{F}$.

DÉMONSTRATION. — Appelons Ω la famille des σ-algèbres $\mathcal{M}$ dans X qui contiennent $\mathcal{F}$. Cette famille Ω ne peut être vide puisqu'elle contient la σ-algèbre de tous les sous-ensembles de X. Désignons par $\mathcal{M}^*$ l'intersection de toutes les σ-algèbres de Ω. Il est bien clair que $\mathcal{M}^*$ contient $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{M}^*$ est contenue dans toute σ-algèbre contenant $\mathcal{F}$. Pour terminer la démonstration, il suffit d'établir que $\mathcal{M}^*$ est elle-même une σ-algèbre.

Si A_n appartient à $\mathcal{M}^*$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et si $\mathcal{M}$ appartient à Ω, il est clair que A_n appartient à $\mathcal{M}$, donc que $\cup A_n \in \mathcal{M}$ puisque $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre. Puisque $\cup A_n \in \mathcal{M}$ pour *tout* $\mathcal{M}$ dans Ω, on en déduit $\cup A_n \in \mathcal{M}^*$. Les deux autres propriétés nécessaires pour une σ-algèbre se vérifient de la même manière.

1.11. Ensembles boréliens. — Prenons pour X un espace topologique. Grâce au théorème 1.10. il existe une plus petite σ-algèbre $\mathcal{B}$ dans X qui contienne la famille des ouverts de X. Les sous-ensembles de $\mathcal{B}$ sont appelés les *boréliens* de X.

En particulier, les fermés de X sont des boréliens puisque par définition ce sont les complémentaires des ouverts de X. De même, les réunions dénombrables de fermés et les intersections dénombrables d'ouverts constituent des boréliens fort importants, auxquels on a respectivement donné à la suite de Hausdorff le nom de F_σ et G_δ. Les lettres F et G sont utilisés pour désigner respectivement les fermés et les ouverts ; σ se rapporte à la réunion (*Summe*), δ se rapporte à l'intersection (*Durchschnitt*). Par exemple, tout intervalle semi-ouvert $[a, b[$ est un G_δ mais également un F_σ dans R^1.

Puisque $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre, nous pouvons considérer X comme un espace mesurable dont les boréliens jouent le rôle des ensembles mesurables : de façon concise, nous considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{B})$. Pour une application continue $f: X \to Y$, où Y désigne un espace topologique, il est évident que $f^{-1}(V)$ appartient à $\mathcal{B}$ pour tout ouvert V dans Y. En d'autres termes, *toute application continue sur X est une fonction mesurable au sens de Borel.*

Lorsque Y est la droite réelle ou le plan complexe, les applications mesurables au sens de Borel sont appelées *fonctions ou applications boréliennes.*

1.12. Théorème

Supposons que $\mathcal{M}$ soit une σ-algèbre et désignons par Y un espace topologique, par f une application de X dans Y.

(a) La collection Ω de tous les sous-ensembles E de Y pour lesquels $f^{-1}(E)$ appartient à $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre dans Y.

(b) Pour une fonction f mesurable et un borélien E de Y, on a $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

(c) Lorsque $Y = [-\infty, \infty]$ et $f^{-1}(]\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$ pour tout nombre réel α, alors f est une fonction mesurable.

(d) Si f est mesurable, si Z est un espace topologique ; si $g: Y \to Z$ est une application borélienne, et si $h = gof$, alors $h: Y \to Z$ est mesurable.

DÉMONSTRATION. — (*a*) provient des relations

$$f^{-1}(Y) = X, \qquad f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A),$$

et

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \ldots$$

Pour démontrer (*b*), on prend Ω comme dans (*a*) ; la mesurabilité de f implique que Ω contient tous les ouverts de Y et comme Ω est une σ-algèbre, on déduit que Ω contient tous les boréliens de l'espace Y.

Pour démontrer (*c*), on désigne par Ω la collection de tous les sous-ensembles E de $[-\infty, \infty]$ tels que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$. Choisissons un réel α, et $\alpha_n < \alpha$ de sorte que $\alpha_n \to \alpha$ lorsque $n \to \infty$. Puisque $]\alpha_n, \infty] \in \Omega$ pour chaque entier n, puisque (*a*) montre que Ω est une σ-algèbre et puisque l'on a :

$$[-\infty, \alpha[\; = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \,]\alpha_n, \infty]^c,$$

on voit que $[-\infty, \alpha[\in \Omega]$. Le même résultat prévaut pour $]\alpha, \beta[\; = [-\infty, \beta[\cap]\alpha, \infty]$. Comme tout ouvert dans $[-\infty, \infty]$ est une réunion d'ensembles des types précédents, on constate que Ω contient tous les ouverts de X, donc que f est mesurable.

Pour démontrer (*d*), soit un ouvert $V \subset Z$. Comme $g^{-1}(V)$ est un borélien de Y et $h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ (*b*) établit que $h^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.

1.13. Définition. — Soit $\{a_n\}$, une suite dans $[-\infty, \infty]$ et posons

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

et

$$\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}. \tag{2}$$

Nous appelons β *la limite supérieure de la suite* $\{a_n\}$ et écrivons

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{3}$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes : tout d'abord $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$; de sorte que $b_k \to \beta$ lorsque $k \to \infty$; ensuite il existe une sous-suite $\{a_{n_i}\}$ de $\{a_n\}$ telle que $a_{n_i} \to \beta$ lorsque i tend vers l'infini. D'ailleurs β est le plus grand nombre vers lequel puisse converger une sous-suite.

De façon analogue, la *limite inférieure* s'obtient en échangeant sup et inf dans les relations (1) et (2). Notons les relations

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} (-a_n). \tag{4}$$

Si la suite $\{a_n\}$ converge, on a évidemment

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{5}$$

Supposons maintenant que $\{f_n\}$ soit une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans la droite réelle achevée $[-\infty, \infty]$. Les fonctions $\sup f_n$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sont définies par

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n (f_n(x)), \tag{6}$$

$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)). \tag{7}$$

Si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

où la limite est supposée exister pour tout x dans X, nous appellerons f la *limite ponctuelle* de la suite $\{f_n\}$.

1.14. Théorème

Si $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ est une fonction mesurable pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, les fonctions g et h ci-dessous sont mesurables.

$$g = \sup_{n\geq 1} f_n \quad ; \qquad h = \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

DÉMONSTRATION. — Grâce aux relations $g^{-1}(]\alpha, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(]\alpha, \infty])$, le théorème 1.12. (*c*) entraîne la mesurabilité de g. Bien sûr, un résultat analogue vaut en remplaçant sup par inf de sorte que la fonction

$$h = \inf_{k\geq 1} \left\{\sup_{i\geq k} f_i\right\} \text{ est mesurable.}$$

Corollaires

(a) La limite d'une suite ponctuellement convergente de fonctions mesurables complexes est mesurable.

(*b*) *Si* f *et* g *sont des fonctions mesurables à valeurs dans la droite réelle achevée, les fonctions* $\max\{f, g\}$ *et* $\min\{f, g\}$ *sont mesurables. En particulier les fonctions suivantes sont mesurables lorsque* f *l'est :*

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{et} \quad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

1.15. Les fonctions précédentes, f^+(et f^-), sont appelées *partie positive* (respectivement *partie négative*) de la fonction f. On note que $|f| = f^+ + f^-$ tandis que $f = f^+ - f^-$ est une représentation standard de f comme différence de deux fonctions non-négatives. Cette représentation possède une propriété minimale intéressante :

Proposition. — *Si* $f = g - h$, $g \geq 0$ *et* $h \geq 0$, *alors* $f^+ \leq g$ *et* $f^- \leq h$.

DÉMONSTRATION. — Les deux relations $f \leq g$ et $g \geq 0$ impliquent manifestement $\max\{f, 0\} \leq g$.

FONCTIONS ÉTAGÉES

1.16. Définition. — Définie sur un espace mesurable, une fonction complexe dont l'image est un sous-ensemble fini est dite *fonction étagée*. En particulier, il y a les fonctions étagées non négatives, dont l'image est un sous-ensemble fini de $[0, \infty[$. Nous excluons explicitement ∞ des valeurs prises par une fonction étagée.

En notant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les valeurs distinctes de la fonction étagée s et par A_i l'ensemble $A_i = \{x : s(x) = s_i\}$, la fonction s s'écrit

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

où χ_{A_i} désigne la fonction caractéristique de A_i (cf. 1.9. (*d*)).

La fonction f est mesurable si et seulement si tous les ensembles A_i sont mesurables.

1.17. Théorème

Soit $f : X \to [0, \infty]$ *une fonction mesurable. Il existe des fonctions mesurables étagées* s_n *définies sur X, de sorte que*

(*a*) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$.

(*b*) *Pour tout* x *dans* X, $s_n(x) \to f(x)$ *lorsque* $n \to \infty$.

DÉMONSTRATION – Posons $\delta_n = 2^{-n}$. À chaque entier positif n, et à chaque nombre réel t, il correspond un unique entier $k = k_n(t)$ tel que $k\delta_n \leq t < (k+1)\delta_n$. On définit :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)\delta_n & \text{si} \quad 0 \leq t < n \\ n & \text{si} \quad n \leq t \leq \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Chaque φ_n est une fonction borélienne sur $[0, \infty]$,

$t - \delta_n < \varphi_n(t) \leq t$ si $0 \leq t \leq n$, (2),

$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \ldots \leq t$ et $\varphi_n(t) \to t$ lorsque $n \to \infty$, pour chaque $t \in [0, \infty]$. Il s'ensuit que les fonctions

$$s_n = \varphi_n \circ f$$

satisfont (*a*) et (*b*). Par le théorème 1.12. (*d*), elles sont mesurables.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES MESURES

1.18. Définition

(a) Une *mesure positive* est une fonction définie sur une σ-algèbre $\mathfrak{M}$, à valeurs dans $[0, \infty]$ et qui possède la propriété d'*additivité dénombrable.* Ceci signifie que pour toute famille dénombrable d'éléments *disjoints* de $\mathfrak{M}$ on a :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1}$$

Pour éliminer un cas trivial, nous supposerons que $\mu(A) < \infty$ pour au moins un élément A de $\mathfrak{M}$.

(b) Un *espace mesuré* est un espace mesurable muni d'une mesure positive sur la σ-algèbre de ses ensembles mesurables.

(c) Une *mesure complexe* est une fonction définie sur une σ-algèbre $\mathfrak{M}$, à valeurs complexes, et qui possède la propriété d'additivité dénombrable.

Remarque : Fréquemment, on appelle seulement *mesure* ce qu'en mettant l'accent sur la positivité nous convenons d'appeler *mesure positive.* Si $\mu(E) = 0$ pour tout sous-ensemble de $\mathfrak{M}$, μ, est une mesure positive d'après notre définition. La valeur ∞ est admise pour les mesures positives, mais lorsque μ est une mesure complexe, il reste entendu que $\mu(E)$ est un nombre complexe pour tout sous-ensemble de $\mathfrak{M}$. Les *mesures réelles* forment un sous-ensemble de l'ensemble des mesures complexes.

1.19. Théorème.

Soit μ une mesure positive sur une σ-algèbre $\mathfrak{M}$. On a :

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$ si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathfrak{M}$.

(c) $A \subset B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$.

(d) $\mu(A_n) \to \mu(A)$ lorsque $n \to \infty$ si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathfrak{M}$, et $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$.

(e) $\mu(A_n) \to \mu(A)$ lorsque $n \to \infty$ si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$; et en supposant que $\mu(A_1)$ ait une valeur finie.

Comme la démonstration nous en convaincra, ces propriétés, (*c*) mise à part, ont encore lieu pour des mesures complexes ; (*b*) est connue sous le nom *d'additivité finie* ; (*c*) sous le nom de *monotonie* de la mesure.

DÉMONSTRATION

(a) On choisit $A \in \mathfrak{M}$ de sorte que $\mu(A) < \infty$, puis on choisit $A_1 = A$ et $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$ dans 1.18. (1).

(*b*) On choisit $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ dans 1.18. (1).

(*c*) Puisque $B = A \cup (B - A)$ et $A \cap (B - A) = \emptyset$, l'étape (*b*) fournit

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A).$$

(*d*) Faisons $B_1 = A_1$, $B_n = A_n - A_{n-1}$ pour = 2, 3, 4, ... Alors $B_n \in \mathcal{M}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$,

$A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, et $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Donc

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \qquad \text{et} \qquad \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

L'étape (*d*) s'en déduit maintenant par définition de la somme d'une série.

(*e*) Faisons $C_n = A_1 - A_n$. Alors $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$,

$$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n),$$

$A_1 - A = \cup C_n$, et (*d*) montre ainsi que

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 - A) = \lim_{n \to \infty} \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Ce qui implique (*e*).

1.20. Exemples. — La construction d'espaces mesurables intéressants n'est pas à portée de la main. Toutefois, quelques exemples sans prétention peuvent immédiatement être fournis.

(*a*) Pour tout sous-ensemble E d'un ensemble X, on pose $\mu(E) = \infty$ lorsque E est infini, et lorsque E est fini $\mu(E) = \text{Card } E$ (nombre des points de E). Cette mesure est la *mesure de dénombrement* sur X.

(*b*) Fixons x_0 dans X et posons, pour tout sous-ensemble E de X, $\mu(E) = 1$ *si* $x_0 \in E$.
La mesure μ est appelée *masse unité* concentrée en x_0 ou *mesure de Dirac en* x_0.

(*c*) Désignons par μ la mesure de dénombrement sur l'ensemble des entiers naturels : $\{1, 2, \ldots\}$ et posons $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. L'intersection des A_n est vide mais $\mu(A_n)$ est infinie pour tout n. Ceci montre que l'hypothèse

« $\mu(A_1) < \infty$ »

n'est pas superflue dans le théorème 1.19. (*e*).

1.21. Commentaire sur la terminologie. — Pour désigner un espace mesuré, on parle fréquemment de triplet ordonné $(X, \mathcal{M}, \mu)$ où X est un ensemble, $\mathcal{M}$ une σ-algèbre sur X et μ une mesure définie sur $\mathcal{M}$. De la même manière, on parle de doublet ou couple ordonné $(X, \mathcal{M})$ pour désigner un espace mesurable. Cette façon d'écrire est logiquement correcte, parfois commode, souvent superflue. Par exemple, dans $(X, \mathcal{M})$, X n'est autre que le plus grand sous-ensemble de $\mathcal{M}$, donc la connaissance de $\mathcal{M}$ permet d'obtenir X. De même, par définition une mesure prend ses valeurs sur une σ-algèbre et si nous connaissons une mesure, nous connaissons