Analyse pour l'agrégation

Hervé Queffélec,
Claude Zuily

Analyse pour l'agrégation

Cours et exercices corrigés

5e édition

DUNOD

ISBN 978-2-10-081180-9

Table des matières

Avant-propos

Le livre

La préparation à l'Agrégation constitue généralement, pour le futur candidat, une période de bilan et de synthèse des connaissances de base qu'il a acquises au cours de ses précédentes années d'étude. Elle est aussi l'occasion d'enrichir et de dépasser ces connaissances. L'objectif de ce livre d'Analyse, qui est le fruit de l'expérience des auteurs dans ce domaine et ce type d'enseignement, comme préparateurs ou comme membres du jury du concours, est de tenter de l'y aider. Trois principes nous ont guidés dans la rédaction de cet ouvrage.

En premier lieu, insister sur des points classiques qui nous ont paru être, en général, mal connus ou mal compris des étudiants : notion de limite supérieure, précompacité, théorèmes de convergence des intégrales, théorie globale des systèmes différentiels non linéaires, etc...

Ensuite, donner le maximum d'exemples et d'applications moins habituels : fonction ζ de Riemann, fonction d'Airy, équations de Hille-Mathieu, sommes de Gauss, séries de Fourier lacunaires, méthodes probabilistes, etc...

Enfin, fournir des compléments ouvrant la voie à des théories plus avancées tout en n'utilisant que des outils classiques : principe du maximum, interpolation, géométrie des espaces de Banach, théorie de Riesz des opérateurs compacts, méthode des caractéristiques, etc...D'autre part, afin de favoriser l'assimilation, ce livre contient aussi plus de cent trente exercices ou longs problèmes (très souvent inédits) entièrement corrigés.

Cette nouvelle édition se compose de dix-sept chapitres, à l'intérieur desquels on s'est cependant permis d'utiliser des outils provenant d'autres chapitres ou d'autres théories. Les énoncés des exercices sont suivis des indications puis des solutions et occupent la fin de chacun d'entre eux.

Bien que volumineux, ce livre ne prétend nullement à l'exhaustivité, et son contenu a fait l'objet de choix de la part des auteurs. Il n'a donc pas pour objectif de se substituer entièrement aux traités classiques d'Analyse. En revanche sur les sujets choisis, tant par le fond que par la forme, cet ouvrage apporte un nombre important d'informations nouvelles.

Tout en étant écrit pour les agrégatifs (internes ou externes), ce livre peut être utilisé avec profit par un public plus large : élèves des classes préparatoires et des grandes écoles, étudiants en Licence et Mastère, enfin jeunes chercheurs, auxquels il pourra apporter, en particulier, illustrations et motivations pour des théories plus avancées.

La saisie et la mise en page des premières éditions de ce texte ont été l'oeuvre de Mme A. Bardot, décédée depuis. Nous prenons l'occasion pour

rendre hommage à sa gentillesse, sa disponibilité, sa grande compétence et sa maîtrise de TEX, qui nous ont été indispensables pendant l'élaboration des premières éditions, avant que nous n'apprenions nous-mêmes la frappe mathématique.

La quatrième édition de 2013 comportait déjà trois chapitres supplémentaires, chapitre XIV (rappels et compléments sur les fonctions holomorphes), chapitre XV (initiation à la dynamique holomorphe, notion de conjugaison, théorème de Denjoy-Wolff), chapitre XVI (en utilisant des notions élémentaires de géométrie différentielle, on prouve l'existence et l'unicité de certaines équations aux dérivées partielles d'un type particulier par la méthode des caractéristiques).

Nous avons mis à profit cette cinquième édition 2020 pour éliminer quelques (ultimes ?) coquilles résiduelles, pour étoffer la présentation du chapitre IV (notamment motiver l'introduction des différents noyaux trigonométriques), et donner au chapitre XIII une version plus générale de la loi du logarithme itéré. Nous avons également ajouté aux seize chapitres existants un dix-septième chapitre "Le système des ondes de surface" dans lequel, à partir des lois classiques de la physique, on décrit mathématiquement le comportement de différents types de vagues à la surface d'un océan (marées, vagues de vent, tsunamis..).

Nous espérons ainsi, en nous inspirant des nouveaux programmes de l'agrégation (dans lesquels les probabilités, la transformée de Fourier, la dynamique discrète, les distributions et donc les équations aux dérivées partielles jouent un rôle renforcé) rendre l'emploi de ce livre plus accessible et plus profitable, pour un large public d'étudiants.

Les auteurs, Juin 2020

Les auteurs

• Hervé Queffélec est Professeur émérite à l'Université de Lille. Il est l'auteur de plusieurs livres d'enseignement comme "Analyse complexe" (avec M. Queffélec, Calvage et Mounet 2019), "Topologie" (Dunod, sixième édition, à paraître en 2020), ou "Twelve landmarks of Twentieth Century Analysis" (avec D. Choimet, Cambridge 2015). Il est également l'auteur de trois livres de recherche ("Dirichlet series and diophantine approximation", avec M.Queffélec, Hindustan Book Agency, à reparaître en 2020), "Banach spaces for analysts" (Volumes 1 et 2, Cambridge 2018, avec D. Li). Ses thèmes de recherche sont l'analyse harmonique commutative, la théorie des opérateurs sur des espaces de Banach de fonctions analytiques, la théorie analytique des séries de Dirichlet et la théorie analytique des nombres.

• Claude Zuily est Professeur émérite à l'Université de Paris Saclay. Il est l'auteur de livres d'enseignement comme "Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles" (Dunod 2002), "Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles (Hermann 1978, Cassini 2010) et de livres de recherche comme “Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem” (Birkhäuser 1983), “Tools and problems in partial differential equations” (avec Thomas Alazard, Springer 2020). Ses thèmes de recherche portent sur les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

Chapitre I

Notion de plus petite et de plus grande limite

I. – Introduction

Ce fut une mini-révolution quand K. Weierstrass, pour étudier les notions de convergence en Analyse, introduisit le langage :

(I.1) *quel que soit epsilon positif, il existe êta positif tel que ...*

Ce langage a contre lui sa relative lourdeur, mais pour lui sa très grande rigueur ; il a parfois donné lieu à des abus : on part de $\varepsilon/1000$, de façon arbitraire, et après des calculs longs et obscurs, on arrive pile à : inférieur ou égal à ε. L'introduction des notions de $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ représente un peu la version "épurée" de (I.1), tout en mettant en évidence l'importance des **inégalités *a priori*** en Analyse : il y a un grand coup de barbe pour définir ces notions, puis un théorème fondamental de passage à la $\underline{\lim}$ ou à la $\overline{\lim}$ dans une inégalité (qui mérite le nom de théorème plus par son utilité que par sa preuve) et ensuite on récupère la rigueur de (I.1) avec la lourdeur en moins. Enfin, les notions de $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ interviennent automatiquement dans certains énoncés fondamentaux (formule de Hadamard pour le rayon de convergence d'une série entière, lemme de Fatou, lemme de Borel-Cantelli en Calcul des Probabilités, etc.).

II. – Théorèmes et définitions

1. Limite supérieure et limite inférieure

Soit $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ la droite numérique achevée ; c'est un espace compact dont la topologie peut être définie par la distance :
$d(x, y) = |\mathrm{Arctg}\, x - \mathrm{Arctg}\, y|$ avec les conventions $\mathrm{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels : $u_n \in \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$. On va voir qu'on peut **toujours** associer à cette suite deux uniques éléments ℓ, L de $\overline{\mathbb{R}}$:

ℓ s'appelle la plus petite limite (ou limite inférieure) de (u_n) et se note $\underline{\lim}\, u_n$ ou $\liminf u_n$. L s'appelle la plus grande limite (ou limite supérieure) de (u_n) et se note $\overline{\lim}\, u_n$ ou $\limsup u_n$.

Théorème II.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Alors il existe un unique L de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que, λ désignant un élément de $\mathbb{R}$:*

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{cases} a) & (\forall \lambda > L)\ (\exists n_0)\ (\forall n \geq n_0) : u_n \leq \lambda \\ b) & (\forall \lambda < L)\ (\forall n_0)\ (\exists n \geq n_0) : u_n \geq \lambda . \end{cases}$$

De même, il existe un unique ℓ de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que, λ désignant un élément de $\mathbb{R}$:

$$\text{(II.2)} \qquad \begin{cases} a) & (\forall \lambda < \ell)\ (\exists n_0)\ (\forall n \geq n_0) : u_n \geq \lambda \\ b) & (\forall \lambda > \ell)\ (\forall n_0)\ (\exists n \geq n_0) : u_n \leq \lambda . \end{cases}$$

$$\text{(II.3)} \qquad \textit{On a toujours } \ell \leq L .$$

$$\text{(II.4)} \qquad (u_n) \textit{ converge vers } u \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \ell = L = u .$$

PREUVE. (II.1) : si une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est non majorée, on convient que sa borne supérieure $\sup A$ est $+\infty$; si elle est non minorée, on convient que sa borne inférieure $\inf A$ est $-\infty$; avec ces conventions, posons :

$$\text{(II.5)} \qquad L := \inf_{n\geq 0} \Big(\sup_{k\geq n} u_k \Big) =: \inf_{n\geq 0} v_n .$$

a) Soit $\lambda > L$ (un tel λ n'existe pas si $L = +\infty$ et il n'y a alors rien à vérifier !) ; par définition d'une borne inférieure, $\exists n_0$ tel que $v_{n_0} \leq \lambda$, d'où $u_n \leq v_{n_0} \leq \lambda$ si $n \geq n_0$.

b) Soit $\lambda < L$ (un tel λ n'existe pas si $L = -\infty$ et il n'y a alors rien à vérifier !) et soit $n_0 \geq 0$; $v_{n_0} \geq L > \lambda$, donc il existe $n \geq n_0$ tel que $u_n \geq \lambda$. Cela montre l'existence d'un L vérifiant (II.1) ; réciproquement, soit $L' \in \mathbb{R}$ vérifiant (II.1).

Si $L' < L$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L' < \lambda < L$; d'après (II.1) a) pour L', il existe $n_0 \geq 0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq \lambda$ et donc $v_{n_0} \leq \lambda$; (II.5) entraîne alors : $L \leq v_{n_0} \leq \lambda$, ce qui est absurde.

Si $L < L'$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L < \lambda < L'$; d'après (II.1) b) pour L', on a $v_{n_0} \geq \lambda$ pour tout $n_0 \geq 0$, donc d'après (II.5), $L \geq \lambda$, ce qui est de nouveau absurde ; et donc $L = L'$.

(II.2) : la preuve de l'existence et de l'unicité est similaire, en posant cette fois :

$$\ell := \sup_{n\geq 0}\Big(\inf_{k\geq n} u_k\Big) =: \sup_{n\geq 0} w_n\,. \tag{II.6}$$

(II.3) : Soit m, n deux entiers ≥ 0 et soit $p = \sup(m,n)$. Par définition, (v_n) est une suite décroissante et (w_n) une suite croissante ; donc en utilisant l'inégalité $\inf A \leq \sup A$ avec $A = \{u_p, u_{p+1}, \ldots\}$ on obtient :

$$w_m \leq w_p \leq v_p \leq v_n\,. \tag{II.7}$$

Fixant n et passant au sup sur m dans (II.7) on obtient

$$\ell \leq v_n\,. \tag{II.8}$$

Passant à l'inf sur n dans (II.8), on obtient *via* (II.5) : $\ell \leq L$.

(II.4) : $\Leftarrow$ Pour plus de clarté limitons-nous au cas où la valeur commune u de ℓ et L se trouve dans $\mathbb{R}$ et donnons-nous $\varepsilon > 0$:

(II.1) a) entraîne l'existence de n_0 tel que : $\forall n \geq n_0\,:\, u_n \leq u + \varepsilon$,

(II.2) a) entraîne l'existence de n_1 tel que : $\forall n \geq n_1\,:\, u_n \geq u - \varepsilon$.

Si $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on voit donc que : $\forall n \geq n_2 : u - \varepsilon \leq u_n \leq u + \varepsilon$, soit encore : $\forall n \geq n_2 : |u_n - u| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $u_n \to u$.

$\Rightarrow$ La preuve est analogue, et laissée au lecteur. $\diamondsuit$

2. Passage à la $\overline{\lim}$ ou $\underline{\lim}$ dans une inégalité

L'utilité des notions de $\underline{\lim}$ ou $\overline{\lim}$ tient d'une part à leur existence toujours garantie (contrairement à celle de lim), d'autre part à leur souplesse d'utilisation illustrée par le :

Théorème II.2. (Principe de passage à la $\underline{\lim}$ ou à la $\overline{\lim}$ dans une inégalité)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels telles que

$$\exists n_0\,; \quad \forall n \geq n_0\,:\, a_n \leq b_n\,. \tag{II.9}$$

On a alors la conclusion

$$\begin{cases} a) & \overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n \\ b) & \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n\,. \end{cases} \tag{II.10}$$

Preuve. a) Posons $L = \overline{\lim}\, a_n$, $L' = \overline{\lim}\, b_n$ et supposons $L > L'$. Soit λ_1, λ_2 deux réels tels que $L > \lambda_1 > \lambda_2 > L'$. D'après (II.1) a) et (II.1) b) :

$$\exists p \geq n_0 \ \text{ tel que } \ \forall n \geq p : b_n \leq \lambda_2 \tag{II.11}$$

$$\exists q \geq p \quad \text{tel que } \ a_q \geq \lambda_1 . \tag{II.12}$$

D'où $b_q \leq \lambda_2 < \lambda_1 \leq a_q$, ce qui donne $b_q < a_q$ et contredit (II.9), prouvant ainsi a) par l'absurde.

b) se prouve de la même façon. ♢

Exemples.

$$\text{Si } \ u_n = (-1)^n , \quad \underline{\lim}\, u_n = -1 \ \text{ et } \ \overline{\lim}\, u_n = +1 . \tag{II.13}$$

$$\text{Si } \ u_n = n , \quad \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n = +\infty . \tag{II.14}$$

(II.15) Si $u_n = \cos(2\pi n\theta)$ avec $0 < \theta \leq 1$, il y a deux cas à distinguer :

a) θ irrationnel $\Rightarrow \underline{\lim}\, u_n = -1$ et $\overline{\lim}\, u_n = +1$. (On utilise la densité de $\mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.)

b) $\theta = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers > 0 premiers entre eux $\Rightarrow \underline{\lim}\, u_n = \alpha$, $\overline{\lim}\, u_n = 1$ avec $\alpha = \min\limits_{0 \leq r < q} \big(\cos 2\pi \frac{r}{q} \big)$. (On effectue la division euclidienne de np par q ; noter que $\alpha = -1$ si q est pair, en faisant $r = \frac{q}{2}$.)

Remarques.

(II.16) $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$ équivaut à dire que (u_n) n'est pas majorée, ou encore qu'on peut trouver une suite extraite $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $\lim\limits_{k \to \infty} u_{n_k} = +\infty$. Donc, $\overline{\lim}\, u_n < +\infty$ équivaut à dire que (u_n) est majorée.

(II.17) $\underline{\lim}\, u_n = +\infty$ équivaut à dire que $u_n \to \infty$. Donc $\underline{\lim}\, u_n < +\infty$ équivaut à dire que u_n ne tend pas vers $+\infty$, soit encore qu'on peut trouver une suite extraite $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ qui est majorée.

(II.18) On a défini $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ pour des suites ; mais on peut faire la même chose pour une application $f : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}$, x_0 point d'accumulation de A dans $\overline{\mathbb{R}}$. On obtient alors

$\ell = \varliminf\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$ et $L = \varlimsup\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$ tels que, V désignant un voisinage de x_0

$$\text{(II.19)} \qquad \begin{cases} a) & (\forall \lambda > L)\ (\exists V)\ (\forall x \in V \cap A) : f(x) \leq \lambda \\ b) & (\forall \lambda < L)\ (\forall V)\ (\exists x \in V \cap A) : f(x) \geq \lambda. \end{cases}$$

$$\text{(II.20)} \qquad \begin{cases} a) & (\forall \lambda < \ell)\ (\exists V)\ (\forall x \in V \cap A) : f(x) \geq \lambda \\ b) & (\forall \lambda > \ell)\ (\forall V)\ (\exists x \in V \cap A) : f(x) \leq \lambda. \end{cases}$$

(Noter que dans (II.1) et (II.2) le rôle de x_0 était joué par $+\infty$, celui de A par les entiers ≥ 0 et celui de V par $\{n; n \geq n_0\} \cup \{\infty\}$.)

Si f, g sont deux applications de A dans $\mathbb{R}$, le théorème II.2 et sa preuve restent valables en remplaçant (II.9) par :

$$\text{(II.21)} \qquad \exists V\,; \forall x \in V \cap A : f(x) \leq g(x)$$

et en remplaçant (II.10) par

$$\text{(II.22)} \qquad \begin{cases} a) & \varlimsup\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \leq \varlimsup\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} g(x) \\ b) & \varliminf\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \leq \varliminf\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} g(x). \end{cases}$$

(II.23) Revenons aux suites ; ℓ (resp. L) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur d'adhérence de (u_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$; en particulier si F est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $u_n \in F$ pour tout $n \geq 0$, alors $\ell \in F$ et $L \in F$. Enfin, ℓ ou L ne dépendent pas des premiers termes de la suite (u_n).

III. – Applications

1. Suites sous-additives

Exemple III.1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\text{(III.1)} \qquad u_{n+p} \leq u_n + u_p\,, \quad \forall n, p \geq 0\,.$$

Alors $\frac{u_n}{n}$ tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^+$.

Preuve. Posons $\ell = \varliminf \frac{u_n}{n}$; $L = \varlimsup \frac{u_n}{n}$; $a = \inf\limits_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$. Nous allons montrer que :

$$\text{(III.2)} \qquad \ell \geq a; \quad \text{et} \quad L \leq a\,.$$

La première inégalité est évidente : $n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_n}{n} \in F := [a, \infty]$ et on applique (II.23).

Pour la seconde inégalité, on fixe un entier $m \geq 1$ et on effectue la division euclidienne de n par m : $n = mq(n) + r(n)$ avec $0 \leq r(n) < m$. D'après (III.1) et une récurrence $u_n \leq u_{mq(n)} + u_{r(n)} \leq q(n)u_m + u_{r(n)} \leq q(n)u_m + (m-1)u_1 + u_0 =: q(n)u_m + C$. Donc si $n \geq 1$: $\frac{u_n}{n} \leq \frac{q(n)}{n} u_m + \frac{C}{n}$. Passons à la $\overline{\lim}$ dans cette inégalité en notant que $\frac{q(n)}{n} \to \frac{1}{m}$; nous obtenons $L \leq \frac{u_m}{m}$. Passant maintenant à la borne inférieure sur m, on obtient la seconde inégalité de (III.2) ; (II.3) et (II.4) montrent alors que $\frac{u_n}{n}$ tend vers a. $\diamondsuit$

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse de sous-additivité (III.1) par l'hypothèse de sous-multiplicativité : $u_{n+p} \leq u_n u_p$. On arrive cette fois à la conclusion que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{1/n}$ existe et vaut $\inf\limits_{n\geq 1} u_n^{1/n}$. Si E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel normé complet, T un opérateur linéaire borné de E et $u_n = ||T^n||$, on a bien : $u_{n+p} = ||T^{n+p}|| \leq ||T^n||||T^p|| = u_n u_p$, et donc $||T^n||^{1/n}$ a une limite.

(Le théorème du rayon spectral précise la valeur de cette limite : c'est $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, où $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda \mathrm{Id}_E$ n 'a pas d'inverse dans $\mathcal{L}(E)\}$ est le spectre de T).

2. Un théorème taubérien

Exemple III.2.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite **décroissante** de réels positifs, $S_n = a_0 + \ldots + a_n$, $\alpha \in]0,1[$ et $c > 0$. On a équivalence entre :

i) $a_n \sim cn^{-\alpha}$ quand $n \to \infty$.

ii) $S_n \sim c\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ quand $n \to \infty$.

($u_n \sim v_n$ signifie comme d'habitude que $u_n = v_n + o(v_n)$ quand $n \to +\infty$).

PREUVE. i) $\Rightarrow$ ii) est classique et utilise seulement la positivité des a_n, pas leur décroissance. Pour la réciproque, posons $\ell = \underline{\lim}\, n^\alpha a_n$ et $L = \overline{\lim}\, n^\alpha a_n$.

Soit $\delta > 1$ et $m = [\delta n]$ (où [ ] désigne la partie entière). Puisque (a_n) décroît :

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \ldots + a_m \leq (m-n)a_n \leq (\delta - 1)n a_n .$$

D'où pour $n \geq 1$, $n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1} n^{\alpha-1}(S_m - S_n)$, soit

$$n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1}\Big[\Big(\frac{n}{m}\Big)^{\alpha-1} m^{\alpha-1} S_m - n^{\alpha-1} S_n\Big]. \qquad \text{(III.3)}$$

Passant à la $\underline{\lim}$ dans (III.3) et utilisant le fait que $m \sim \delta n$ quand $n \to \infty$, on obtient :

$$\ell \geq \frac{1}{\delta - 1}\left[\delta^{1-\alpha}\,\frac{c}{1-\alpha} - \frac{c}{1-\alpha}\right] = \frac{c}{1-\alpha}\,\frac{\delta^{1-\alpha}-1}{\delta - 1}. \tag{III.4}$$

Passant maintenant à la lim dans (III.4) quand δ tend vers 1 par valeurs supérieures, on obtient :

$$\ell \geq \frac{c}{1-\alpha}\,(1-\alpha) = c. \tag{III.5}$$

Soit $\delta \in]0,1[$ et $m = [\delta n]$. On a cette fois :

$$S_n - S_m = a_{m+1} + \ldots + a_n \geq (n-m)\,a_n\,,$$

d'où pour $n \geq 1$:

$$n^\alpha\, a_n \leq \frac{1}{1-\frac{m}{n}}\left[n^{\alpha-1}\,S_n - m^{\alpha-1}\,S_m\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1}\right]. \tag{III.6}$$

Le passage à la $\overline{\lim}$ dans (III.6) donne :

$$L \leq \frac{1}{1-\delta}\left[\frac{c}{1-\alpha} - \frac{c}{1-\alpha}\,\delta^{1-\alpha}\right] = \frac{c}{1-\alpha}\left[\frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta}\right]. \tag{III.7}$$

Passant maintenant à la lim dans (III.7) quand δ tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$L \leq \frac{c}{1-\alpha}\,(1-\alpha) = c. \tag{III.8}$$

(II.3), (III.5) et (III.8) entraînent $\ell = L = c$; puis (II.4) implique $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha\, a_n = c$, ce qui prouve i). ♢

Remarques.

(III.9) On a réussi à prouver l'implication relativement délicate ii) $\Rightarrow$ i) sans découper un seul epsilon en mille morceaux.

(III.10) La condition **taubérienne** de décroissance est essentielle, comme le montre l'exemple $a_n = \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } n \text{ est pair} \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Un calcul simple montre que $S_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{1\leq k\leq \frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2\sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{n}$, donc ii) a lieu avec $c = \alpha = \frac{1}{2}$, alors que i) est clairement en défaut.