

ANALYSE

1^{re} ANNÉE

ANALYSE

1^{re} ANNÉE

Cours et exercices avec solutions

François Liret

Maître de conférences
à l'université Paris 7 - Denis Diderot

Dominique Martinais

Maître de conférences
à l'université Paris 7 - Denis Diderot

Préfacé par

Michel Zisman

Professeur émérite de l'Université Paris 7 - Denis Diderot

2^e édition

DUNOD

• *Cours de Mathématiques, pour la licence 1re et 2e années*

Analyse, 1^{re} année

Algèbre, 1^{re} année

Analyse, 2^e année

Algèbre et géométrie, 2^e année

François Liret et Dominique Martinais

• *Cours de Mathématiques pour la licence 3^e année*

Algèbre, Lionel Schwartz

Fonctions analytiques, Pierre Vogel

Topologie et analyse, Georges Skandalys

Calcul différentiel et calcul intégral, Marc Chaperon

Illustration de couverture : Vitaly.Adobe-Stock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 1997, 2003, 2020 pour la nouvelle présentation

11 Rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-081575-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Pourquoi publier un nouveau manuel ? Après tout, au cours des dix et même des vingt dernières années les programmes ont peu changé : tout au plus un chapitre un peu marginal se trouve-t-il parfois ajouté, parfois supprimé. Dans l'ensemble ce que doivent, ce que peuvent apprendre étudiantes et étudiants durant leurs deux premières années à l'université demeure à peu près stable.

Mais tout le reste est profondément modifié. La société d'aujourd'hui ne ressemble plus à celle d'hier, les lycées et leurs élèves ont changé, et aussi leurs professeurs. L'enseignement dans les universités lui non plus n'est pas resté figé.

Cette évolution, d'ailleurs preuve de vitalité, doit se traduire aussi dans les ouvrages proposés à celles et ceux qui abordent maintenant les études universitaires : le public d'aujourd'hui mérite des livres qui ont été écrits pour lui, par des auteurs qui ont suivi et qui ont compris son évolution.

Telle est l'ambition de cette collection de premier cycle de mathématiques confiée à François Liret et Dominique Martinai qui apporte à ses lecteurs non seulement une présentation impeccable plaisante à l'œil et donc facile à lire, mais surtout le fruit d'années d'expérience et de réflexion sur la manière de rédiger un texte scientifique, sur l'importance respective de la présentation des *outils* qu'ils devront apprendre à manier, des *démonstrations* qui sont l'âme des mathématiques et des *explications* indispensables à la compréhension de celles-ci. Le cours est illustré d'exemples et d'exercices judicieux, qui apporte aux lecteurs tout ce qui leur est nécessaire pour réussir pleinement leurs études.

Michel Zisman

Professeur émérite de l'université Paris 7 - Denis Diderot

Table des matières

Chapitre 1. Nombres réels et fonctions

1. Opérations sur les nombres réels	2
2. Fonction numérique de variable réelle	7
Exercices	14

Chapitre 2. Limite et continuité

1. Limite d'une fonction	19
2. Propriétés des limites et opérations	24
3. Fonctions continues	31
Exercices	34

Chapitre 3. Les suites

1. Limite d'une suite	39
2. Théorèmes sur les limites	40
3. Des exemples importants	44
Exercices	49

Chapitre 4. Borne supérieure

1. La propriété des segments emboîtés	55
2. Suites et fonctions croissantes	62
3. Suites récurrentes	66
Exercices	71

Chapitre 5. Fonctions continues sur un intervalle

1. Image d'un intervalle	77
2. Image d'un segment	81
3. Fonctions monotones	83
Exercices	87

Chapitre 6.	Dérivée d'une fonction	
1. Dérivée en un point et fonction dérivée		93
2. Dérivée à gauche, dérivée à droite		95
3. Calcul des dérivées		96
4. Dérivées successives		101
Exercices		102
Chapitre 7.	Utilisation de la dérivée	
1. Extremum local d'une fonction		107
2. Le théorème des accroissements finis		110
3. Fonction convexe		114
4. Équations différentielles linéaires à coefficients constants		117
Exercices		121
Chapitre 8.	Fonctions usuelles	
1. Fonctions logarithme, puissance et exponentielle		127
2. Croissances comparées		133
3. Fonctions trigonométriques réciproques		136
4. Fonctions hyperboliques		140
Exercices		145
Chapitre 9.	L'intégrale	
1. Intégrale d'une fonction étagée		151
2. Fonction intégrable		154
3. Propriétés de l'intégrale		156
Exercices		164
Chapitre 10.	Primitives	
1. Primitives d'une fonction		167
2. Primitives usuelles		171
3. Intégration par parties		173
4. Changement de variable		174
5. Primitive d'une fonction rationnelle		177
6. D'autres calculs de primitives		181
Exercices		184

Chapitre 11. Utilisation des dérivées successives

1. Fonction de classe C^p	191
2. Un exemple de fonction de classe C^∞	193
3. Formules de Taylor	196
Exercices	202

Chapitre 12. Développements limités

1. Un exemple	207
2. Notion de développement limité	208
3. Développement limité des fonctions de classe C^n	212
4. Développement limité au point 0 des fonctions usuelles	215
5. Deux exemples garde-fou	218
Exercices	220

Chapitre 13. Le calcul des développements limités

1. Développement limité d'une somme et du produit par un nombre	223
2. Tronquer un polynôme	225
3. Développement limité d'un produit	226
4. Développement limité d'une composée	227
5. Calcul pratique du développement limité d'un quotient	231
6. Quelques cas particuliers	233
7. Applications des développements limités	233
Exercices	237

Chapitre 14. Étude de fonctions

1. Sens de variation	243
2. Étude locale en un point	243
3. Branche infinie et asymptote	248
4. Représentation graphique	251
5. Un exemple d'étude de fonction	251
Exercices	255

Chapitre 15. Courbes paramétrées

1. Limite, continuité et dérivée d'une fonction vectorielle	263
2. Courbe paramétrée	265
3. Plan d'étude d'une courbe paramétrée	272
4. Un exemple d'étude de courbe paramétrée	274
5. Longueur d'un arc paramétré	276
Exercices	280

Chapitre 16.	Étude de primitives	
1. Un exemple		285
2. Intégrales impropres		288
3. Des théorèmes de convergence		292
4. Fonctions équivalentes		296
5. Comment étudier une fonction primitive		300
Exercices		303
Chapitre 17.	Équations différentielles	
1. Notion d'équation différentielle		309
2. Équations différentielles linéaires		311
3. Équations différentielles à variables séparées		316
4. Équations différentielles autonomes		321
Exercices		327
Quelques repères historiques		333
Index		337

Avant-Propos

Nous avons voulu que ce cours de première année reste élémentaire et que les résultats en soient démontrés soigneusement. L'exposé est en général très détaillé : nous espérons qu'il permettra aux étudiants d'apprendre à raisonner. Nous avons également tenu à présenter les algorithmes de calcul qu'il est nécessaire de pratiquer et à mettre en évidence des conseils pour chercher les exercices. Lorsque dans le texte, l'un des mots théorème, proposition ou corollaire est souligné, c'est qu'il s'agit d'un énoncé important.

Puisse ce manuel aider les étudiants dans leur apprentissage des mathématiques.

Nous devons un grand merci à Michel Zisman qui nous a patiemment relus et dont les conseils et nombreuses suggestions nous ont été très utiles. Merci également à Alberto Arabia qui a mis son talent et sa compétence en informatique au service de la mise en page. Enfin nous remercions Anne Bourguignon qui s'est chargée avec efficacité de l'édition de ce livre.

Les auteurs

Cette présente édition est l'occasion de préciser ou de simplifier le cours et d'y ajouter commentaires, exemples et exercices traités. De nouveaux exercices d'entraînement, avec indications de solutions, sont aussi proposés. En arithmétique, nous avons introduit la fonction indicatrice d'Euler et en analyse, la notion de longueur d'un arc paramétré.

Plusieurs collègues et amis nous ont suggéré des améliorations et permis de corriger des fautes, nous les remercions vivement.

Quelques lettres grecques employées en mathématiques

α	alpha	ε	epsilon	λ, Λ	lambda	σ, Σ	sigma
β	bêta	ζ	zêta	μ	mu	φ, Φ	phi
γ, Γ	gamma	η	êta	π, Π	pi	ψ, Ψ	psi
δ, Δ	delta	θ	thêta	ρ	rho	ω, Ω	oméga

Principales notations utilisées

\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs
\mathbb{Q}	ensemble des nombres rationnels
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
$[a, b],]a, +\infty[,$ etc	intervalles de \mathbb{R}
$f : A \rightarrow B$	application d'un ensemble A dans un ensemble B
f^{-1}	bijection réciproque de la bijection f
$\sup A, \inf A$	borne supérieure, borne inférieure d'une partie A de \mathbb{R}
$E(x)$	partie entière du nombre réel x
$ x $	valeur absolue du nombre réel x
$ z $	module du nombre complexe z
$\sqrt{x}, \sqrt[n]{x}$	racine carrée, racine n -ième du nombre réel x
Log	fonction logarithme (népérien)
exp	fonction exponentielle
e	nombre $\exp(1)$
sin, cos, tg	fonctions sinus, cosinus, tangente
Arc sin, Arc cos, Arc tg	fonctions arc sinus, arc cosinus, arc tangente
sh, ch, th	fonctions sinus, cosinus, tangente hyperbolique
(u_n)	suite de terme général u_n
$\lim u_n$	limite de la suite (u_n)
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	limite, à droite, à gauche, de $f(x)$ quand x tend vers x_0
$f', f'', f^{(n)}$	dérivée de f , dérivée seconde, dérivée n -ième
f'_g, f'_d	dérivée à gauche de f , dérivée à droite
$\int_a^b f(t) dt$	intégrale ou intégrale impropre de a à b de la fonction f
$\int f(t) dt$	une primitive de la fonction f
$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$	$f(x)$ et $g(x)$ sont équivalents quand x tend vers x_0

Chapitre 1

Nombres réels et fonctions

Au Lycée, vous avez rencontré les nombres réels sous des formes différentes. Voici des exemples de nombres réels.

- ▶ Les entiers naturels et les entiers relatifs.
- ▶ Les nombres décimaux $a10^n$ où a et n sont des entiers relatifs ; ainsi 3×10^{-5} et -417×10^4 sont des nombres décimaux.
- ▶ Les nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier positif. Un nombre décimal est en particulier rationnel.
- ▶ Les nombres définis par leur *développement décimal*, comme $31,22\dots$, où les trois points indiquent que toutes les décimales valent 2. Un autre exemple est $-4,78612121\dots$, où les trois points indiquent que la suite des décimales continue « comme indiquée », c'est-à-dire en écrivant les chiffres 1 et 2 alternativement. Bien sûr, on ne voit en général sur les premières décimales aucune loi permettant de deviner les suivantes. Bientôt, nous comprendrons pourquoi un développement décimal définit un nombre réel. Pour le moment, remarquons que le développement d'un nombre décimal se termine par des zéros : $3158 \times 10^{-2} = 31,5800\dots$. Et réciproquement, si un développement décimal se termine par des zéros, alors le nombre est décimal.
- ▶ Les nombres définis par des opérations à partir d'autres nombres réels, par exemple $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[3]{-7}$ ou $(1-3^{-n})^{2^n}$.
- ▶ Des nombres particuliers, utiles en Mathématiques, qui bénéficient pour cela d'une notation spéciale : citons le nombre e , base du logarithme népérien et le nombre π qui est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

1. Opérations sur les nombres réels

L'ensemble des nombres réels se note \mathbb{R} . On peut ajouter, soustraire ou multiplier des nombres réels et diviser par un nombre réel différent de 0. Les règles de calcul sont celles que vous avez toujours pratiquées :

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \quad 0 + a = a, \quad a + b = 0 \iff a = -b, \quad a + (b + c) = (a + b) + c \\ ab &= ba, \quad 1 \times a = a, \quad ab = 1 \iff a = 1/b, \quad a(bc) = (ab)c, \quad a(b + c) = ab + ac \\ ab = 0 &\iff (a = 0 \text{ ou } b = 0). \end{aligned}$$

L'ordre sur \mathbb{R}

Tout nombre réel différent de 0 est positif ou négatif ; on note parfois \mathbb{R}_+ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul et \mathbb{R}_- l'ensemble des nombres réels négatifs ou nul. Si a et b sont des nombres réels, on dit que a est inférieur ou égal à b si le nombre $b - a$ est positif ou nul ; cette relation se note $a \leq b$ ou bien $b \geq a$.

Si $a \leq b$ et $a \neq b$, on dit que a est strictement plus petit que b , ce qui se note $a < b$ ou encore $b > a$.

Ainsi, une et une seule des relations suivantes est vérifiée :

$$a = b, \quad a < b \quad \text{ou} \quad a > b.$$

On définit le plus grand des nombres réels a et b en posant

$$\max(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } b \geq a \\ a & \text{si } a > b. \end{cases}$$

On définit de même $\min(a, b)$, le plus petit des nombres a et b .

Rappelons quelques unes des opérations permises sur les inégalités :

- $a < b \iff a + c < b + c$ pour tout nombre réel c
- si $a < b$ et $a' \leq b'$, alors $a + a' < b + b'$
- $a < b \iff -b < -a$
- si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$

et la propriété fondamentale (dite d'Archimède) :

- si A est un nombre réel positif ou nul, il existe un entier n tel que $n > A$.

Voici une conséquence importante de la propriété d'Archimède :

$$\text{si } a > 0 \text{ et } A \geq 0, \text{ il existe un entier } n \geq 1 \text{ tel que } \frac{A}{n} < a.$$

En effet, puisqu'on a $A/a \geq 0$, il existe un entier n tel que $n > A/a$ donc $n > 0$. En multipliant cette inégalité par a qui est positif, il vient $na > A$ ou encore $A/n < a$.

On en déduit aussi la proposition suivante.

Proposition. Soit a un nombre réel strictement positif et soit x un nombre réel. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka \leq x < (k+1)a$.

Démonstration. Supposons $x \geq 0$. Puisque a est strictement positif, le nombre réel x/a est positif ou nul. D'après la propriété d'Archimède, il existe donc au moins un entier $n \geq 1$ tel que $n > x/a$. Si p est un entier naturel tel que $p \leq x/a$, alors on a $0 \leq p < n$; il n'y a donc qu'un nombre fini d'entiers naturels inférieurs ou égaux à x/a . Si nous appelons k le plus grand de ces entiers, alors les deux inégalités $k \leq x/a$ et $k+1 > x/a$ sont vérifiées. En multipliant celles-ci par le nombre positif a , il vient $ka \leq x < (k+1)a$.

Supposons $x < 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-n > -x/a$ c'est-à-dire $n < x/a$. Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p tels que $n \leq p \leq x/a$. En appelant k le plus grand de ces entiers, nous avons $k \leq x/a$ et $k+1 > x/a$, c'est-à-dire $ka \leq x < (k+1)a$.

Nous avons démontré qu'il existe au moins un entier $k \in \mathbb{Z}$ qui vérifie l'encadrement de la proposition. Montrons maintenant que cet entier k est unique. Supposons que ℓ est un entier vérifiant aussi les inégalités $\ell a \leq x < (\ell+1)a$. Nous avons $\ell a \leq x < (k+1)a$ donc en simplifiant par a qui est strictement positif, il vient $\ell < k+1$. Puisque k et ℓ sont des entiers, on en déduit $\ell \leq k$. De même, les inégalités $ka \leq x < (\ell+1)a$ impliquent $k < \ell+1$ donc $k \leq \ell$. Ainsi nous avons $\ell = k$ et cela montre l'unicité de l'entier k vérifiant les inégalités $ka \leq x < (k+1)a$. ■

Appliquons la proposition en choisissant $a = 1$: pour tout nombre réel x , il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. L'entier k est le plus grand entier inférieur ou égal à x . Cela justifie la définition suivante.

Définition

Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la *partie entière* de x ; nous le noterons $E(x)$.

Par définition, $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

On a par exemple

$$(E(x) = 0 \iff 0 \leq x < 1) \text{ et } (E(x) = -3 \iff -3 \leq x < -2).$$