ANALYSE

1re ANNÉE

ANALYSE

1re ANNÉE

Cours et exercices avec solutions

François Liret
Maître de conférences
à l'université Paris 7 - Denis Diderot

Dominique Martinais
Maître de conférences
à l'université Paris 7 - Denis Diderot

Préfacé par
Michel Zisman
Professeur émérite de l'Université Paris 7 - Denis Diderot

2e édition

DUNOD

DANS LA MÊME COLLECTION

- ***Cours de Mathématiques, pour la licence 1re et 2e années***
  Analyse, 1re année
  Algèbre, 1re année
  Analyse, 2^{e} année
  Algèbre et géométrie, 2^{e} année
  François Liret et Dominique Martinais

- ***Cours de Mathématiques pour la licence 3^{e} année***
  Algèbre, Lionel Schwartz
  Fonctions analytiques, Pierre Vogel
  Topologie et analyse, Georges Skandalys
  Calcul différentiel et calcul intégral, Marc Chaperon

Illustration de couverture : Vitaly.Adobe-Stock.com

11 Rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-081575-3

Préface

Pourquoi publier un nouveau manuel ? Après tout, au cours des dix et même des vingt dernières années les programmes ont peu changé : tout au plus un chapitre un peu marginal se trouve-t-il parfois ajouté, parfois supprimé. Dans l'ensemble ce que doivent, ce que peuvent apprendre étudiantes et étudiants durant leurs deux premières années à l'université demeure à peu près stable.

Mais tout le reste est profondément modifié. La société d'aujourd'hui ne ressemble plus à celle d'hier, les lycées et leurs élèves ont changé, et aussi leurs professeurs. L'enseignement dans les universités lui non plus n'est pas resté figé.

Cette évolution, d'ailleurs preuve de vitalité, doit se traduire aussi dans les ouvrages proposés à celles et ceux qui abordent maintenant les études universitaires : le public d'aujourd'hui mérite des livres qui ont été écrits pour lui, par des auteurs qui ont suivi et qui ont compris son évolution.

Telle est l'ambition de cette collection de premier cycle de mathématiques confiée à François Liret et Dominique Martinais qui apporte à ses lecteurs non seulement une présentation impeccable plaisante à l'œil et donc facile à lire, mais surtout le fruit d'années d'expérience et de réflexion sur la manière de rédiger un texte scientifique, sur l'importance respective de la présentation des *outils* qu'ils devront apprendre à manier, des *démonstrations* qui sont l'âme des mathématiques et des *explications* indispensables à la compréhension de celles-ci. Le cours est illustré d'exemples et d'exercices judicieux, qui apporte aux lecteurs tout ce qui leur est nécessaire pour réussir pleinement leurs études.

Michel Zisman

Professeur émérite de l'université Paris 7 - Denis Diderot

Table des matières

Chapitre 11. Utilisation des dérivées successives

Chapitre 12. Développements limités

Chapitre 13. Le calcul des développements limités

Chapitre 14. Étude de fonctions

Chapitre 15. Courbes paramétrées

Avant-Propos

Nous avons voulu que ce cours de première année reste élémentaire et que les résultats en soient démontrés soigneusement. L'exposé est en général très détaillé : nous espérons qu'il permettra aux étudiants d'apprendre à raisonner. Nous avons également tenu à présenter les algorithmes de calcul qu'il est nécessaire de pratiquer et à mettre en évidence des conseils pour chercher les exercices. Lorsque dans le texte, l'un des mots théorème, proposition ou corollaire est souligné, c'est qu'il s'agit d'un énoncé important.

Puisse ce manuel aider les étudiants dans leur apprentissage des mathématiques.

Nous devons un grand merci à Michel Zisman qui nous a patiemment relus et dont les conseils et nombreuses suggestions nous ont été très utiles. Merci également à Alberto Arabia qui a mis son talent et sa compétence en informatique au service de la mise en page. Enfin nous remercions Anne Bourguignon qui s'est chargée avec efficacité de l'édition de ce livre.

Les auteurs

Cette présente édition est l'occasion de préciser ou de simplifier le cours et d'y ajouter commentaires, exemples et exercices traités. De nouveaux exercices d'entraînement, avec indications de solutions, sont aussi proposés. En arithmétique, nous avons introduit la fonction indicatrice d'Euler et en analyse, la notion de longueur d'un arc paramétré.

Plusieurs collègues et amis nous ont suggéré des améliorations et permis de corriger des fautes, nous les remercions vivement.

Quelques lettres grecques employées en mathématiques

α		alpha	ε		epsilon	$\lambda,$	Λ	lambda	$\sigma,$	Σ	sigma
β		bêta	ζ		zêta	μ		mu	$\varphi,$	Φ	phi
$\gamma,$	Γ	gamma	η		êta	$\pi,$	Π	pi	$\psi,$	Ψ	psi
$\delta,$	Δ	delta	θ		thêta	ρ		rho	$\omega,$	Ω	oméga

Principales notations utilisées

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$[a,b]$, $]a,+\infty[$, etc	intervalles de $\mathbb{R}$
$f : A \to B$	application d'un ensemble A dans un ensemble B
f^{-1}	bijection réciproque de la bijection f
$\sup A$, $\inf A$	borne supérieure, borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$
$E(x)$	partie entière du nombre réel x
$\|x\|$	valeur absolue du nombre réel x
$\|z\|$	module du nombre complexe z
$\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$	racine carrée, racine n-ième du nombre réel x
Log	fonction logarithme (népérien)
$\exp$	fonction exponentielle
e	nombre $\exp(1)$
$\sin$, $\cos$, tg	fonctions sinus, cosinus, tangente
$\operatorname{Arc}\sin$, $\operatorname{Arc}\cos$, $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}$	fonctions arc sinus, arc cosinus, arc tangente
sh, ch, th	fonctions sinus, cosinus, tangente hyperbolique
(u_n)	suite de terme général u_n
$\lim u_n$	limite de la suite (u_n)
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$	limite, à droite, à gauche, de $f(x)$ quand x tend vers x_0
f', f'', $f^{(n)}$	dérivée de f, dérivée seconde, dérivée n-ième
f'_g, f'_d	dérivée à gauche de f, dérivée à droite
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$	intégrale ou intégrale impropre de a à b de la fonction f
$\displaystyle\int f(t)\,dt$	une primitive de la fonction f
$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$	$f(x)$ et $g(x)$ sont équivalents quand x tend vers x_0

Chapitre 1

Nombres réels et fonctions

Au Lycée, vous avez rencontré les nombres réels sous des formes différentes. Voici des exemples de nombres réels.

- Les entiers naturels et les entiers relatifs.
- Les nombres décimaux $a10^n$ où a et n sont des entiers relatifs ; ainsi 3×10^{-5} et -417×10^4 sont des nombres décimaux.
- Les nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier positif. Un nombre décimal est en particulier rationnel.
- Les nombres définis par leur *développement décimal*, comme $31,22\ldots$, où les trois points indiquent que toutes les décimales valent 2. Un autre exemple est $-4,78612121\ldots$, où les trois points indiquent que la suite des décimales continue « comme indiquée », c'est-à-dire en écrivant les chiffres 1 et 2 alternativement. Bien sûr, on ne voit en général sur les premières décimales aucune loi permettant de deviner les suivantes. Bientôt, nous comprendrons pourquoi un développement décimal définit un nombre réel. Pour le moment, remarquons que le développement d'un nombre décimal se termine par des zéros : $3158 \times 10^{-2} = 31,5800\ldots$. Et réciproquement, si un développement décimal se termine par des zéros, alors le nombre est décimal.
- Les nombres définis par des opérations à partir d'autres nombres réels, par exemple $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[3]{-7}$ ou $\left(1-3^{-n}\right)^{2^n}$.
- Des nombres particuliers, utiles en Mathématiques, qui bénéficient pour cela d'une notation spéciale : citons le nombre e, base du logarithme népérien et le nombre π qui est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

1. Opérations sur les nombres réels

L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$. On peut ajouter, soustraire ou multiplier des nombres réels et diviser par un nombre réel différent de 0. Les règles de calcul sont celles que vous avez toujours pratiquées :

$$a+b=b+a\ ,\ 0+a=a\ ,\ a+b=0 \iff a=-b\ ,\ a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$ab=ba\ ,\ 1\times a=a\ ,\ ab=1 \iff a=1/b\ ,\ a(bc)=(ab)c\ ,\ a(b+c)=ab+ac$$
$$ab=0 \iff (\,a=0 \quad \text{ou} \quad b=0\,)\,.$$

L'ordre sur $\mathbb{R}$

Tout nombre réel différent de 0 est positif ou négatif ; on note parfois $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nul.
Si a et b sont des nombres réels, on dit que *a est inférieur ou égal à b* si le nombre $b-a$ est positif ou nul ; cette relation se note $a \leqslant b$ ou bien $b \geqslant a$.
Si $a \leqslant b$ et $a \neq b$, on dit que a est *strictement plus petit que* b, ce qui se note $a < b$ ou encore $b > a$.
Ainsi, une et une seule des relations suivantes est vérifiée :

$$a=b \quad , \quad a<b \quad \text{ou} \quad a>b\,.$$

On définit *le plus grand des nombres réels* a et b en posant

$$\max(a,b)=\begin{cases} b & \text{si } b \geqslant a \\ a & \text{si } a > b\,. \end{cases}$$

On définit de même $\min(a,b)$, *le plus petit des nombres a et b*.

Rappelons quelques unes des opérations permises sur les inégalités :

- $a<b \iff a+c<b+c$ pour tout nombre réel c
- si $a<b$ et $a' \leqslant b'$, alors $a+a'<b+b'$
- $a<b \iff -b<-a$
- si $a<b$ et $c>0$, alors $ac<bc$

et la propriété fondamentale (dite d'Archimède) :

- *si A est un nombre réel positif ou nul, il existe un entier n tel que $n>A$.*

Voici une conséquence importante de la propriété d'Archimède :

si $a>0$ et $A \geqslant 0$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\dfrac{A}{n}<a$.

En effet, puisqu'on a $A/a \geqslant 0$, il existe un entier n tel que $n > A/a$ donc $n>0$. En multipliant cette inégalité par a qui est positif, il vient $na>A$ ou encore $A/n<a$.
On en déduit aussi la proposition suivante.

Proposition. *Soit a un nombre réel strictement positif et soit x un nombre réel. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka \leqslant x < (k+1)a$.*

Démonstration. Supposons $x \geqslant 0$. Puisque a est strictement positif, le nombre réel x/a est positif ou nul. D'après la propriété d'Archimède, il existe donc au moins un entier $n \geqslant 1$ tel que $n > x/a$. Si p est un entier naturel tel que $p \leqslant x/a$, alors on a $0 \leqslant p < n$; il n'y a donc qu'un nombre fini d'entiers naturels inférieurs ou égaux à x/a. Si nous appelons k le plus grand de ces entiers, alors les deux inégalités $k \leqslant x/a$ et $k+1 > x/a$ sont vérifiées. En multipliant celles-ci par le nombre positif a, il vient $ka \leqslant x < (k+1)a$.

Supposons $x < 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-n > -x/a$ c'est-à-dire $n < x/a$. Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p tels que $n \leqslant p \leqslant x/a$. En appelant k le plus grand de ces entiers, nous avons $k \leqslant x/a$ et $k+1 > x/a$, c'est-à-dire $ka \leqslant x < (k+1)a$.

Nous avons démontré qu'il existe au moins un entier $k \in \mathbb{Z}$ qui vérifie l'encadrement de la proposition. Montrons maintenant que cet entier k est unique. Supposons que ℓ est un entier vérifiant aussi les inégalités $\ell a \leqslant x < (\ell+1)a$. Nous avons $\ell a \leqslant x < (k+1)a$ donc en simplifiant par a qui est strictement positif, il vient $\ell < k+1$. Puisque k et ℓ sont des entiers, on en déduit $\ell \leqslant k$. De même, les inégalités $ka \leqslant x < (\ell+1)a$ impliquent $k < \ell + 1$ donc $k \leqslant \ell$. Ainsi nous avons $\ell = k$ et cela montre l'unicité de l'entier k vérifiant les inégalités $ka \leqslant x < (k+1)a$. ■

Appliquons la proposition en choisissant $a = 1$: pour tout nombre réel x, il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant x < k+1$. L'entier k est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Cela justifie la définition suivante.

Définition

Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la *partie entière* de x ; nous le noterons $E(x)$.

Par définition, $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

On a par exemple

$$\big(E(x) = 0 \iff 0 \leqslant x < 1\big) \quad \text{et} \quad \big(E(x) = -3 \iff -3 \leqslant x < -2\big).$$