ANALYSE FONCTIONNELLE

ANALYSE FONCTIONNELLE

Théorie et applications

Haïm Brezis
Membre de l'Institut
Professeur à l'université Pierre-et-Marie Curie

Ouvrage publié sous la direction de
P. G. Ciarlet et J.L. Lions

DUNOD

Illustration de couverture : *frantiska. Adobe Stock*

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN : 978-2-10-082028-3

PRÉSENTATION DE LA COLLECTION « MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES POUR LA MAITRISE »

La Collection *Mathématiques appliquées pour la maîtrise* a pour but de présenter les principales théories mathématiques générales directement orientées vers les applications, de les développer de manière rigoureuse, et d'indiquer explicitement et avec précision la très grande variété de leurs applications.

Des *théories mathématiques générales orientées vers les applications* sont, notamment, les fondements de l'analyse des *équations différentielles et aux dérivées partielles*, linéaires ou non, qui « gouvernent » tellement de situations en Physique, en Mécanique, en Chimie, etc., et jusqu'en Économétrie! Ce sont aussi les outils principaux de l'*Analyse Numérique*, préalables obligés au traitement sur ordinateur : analyse numérique matricielle, méthodes de l'optimisation, méthodes de différences finies ou d'éléments finis pour l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles; c'est aussi la *Statistique*, dont les applications sont universelles, et où l'ordinateur a apporté, là encore, une impulsion nouvelle considérable; c'est aussi la *Mécanique des Solides* et la *Mécanique des Fluides* dont une connaissance déjà sérieuse est indispensable à tout mathématicien appliqué.

Ces théories générales sont, dans la Collection, développées de manière rigoureuse, par le biais des solutions les plus synthétiques, les plus élégantes et les plus « confirmées »; elle fournissent ainsi tous les outils nécessaires pour aborder la grande majorité des problèmes posés quotidiennement par les applications. Les théories générales présentées dans cette Collection ont d'ailleurs été élaborées pour faire face précisément aux *applications*, c'est-à-dire à des problèmes posés dans des disciplines parfois très éloignées des mathématiques mais néanmoins susceptibles d'être formalisés de façon mathématique.

Ces mêmes théories devraient également servir de point de départ pour l'étude des *nouveaux* problèmes posés par les applications; il est en effet essentiel de savoir que ces nouveaux problèmes, d'importance fondamentale, se présentent sous la forme de questions complètement « ouvertes ». Après le préalable d'une modélisation mathématique souvent déjà imparfaite, la *seule* façon de les aborder réside alors dans un traitement « massif » sur ordinateur, à *l'aide précisément des méthodes et des outils fondamentaux présentés dans cette Collection.*

C'est pourquoi cette Collection, qui s'adresse à tous les étudiants du Deuxième Cycle de Mathématiques dites « appliquées », mais aussi (au moins pour certains de ses volumes) aux étudiants du Deuxième Cycle de Mathématiques dites « pures », de Mécanique, de Physique, aux élèves des Grandes Écoles d'Ingénieurs, ..., devrait non seulement initier ses lecteurs à des théories rigoureuses et élégantes, tout en leur fournissant un outil déjà utilisable dans de très nombreuses applications, mais aussi, nous l'espérons, leur donner le désir d'aller bien au-delà.

Pour l'accueil compréhensif qu'elle a bien voulu réserver à cette Collection, il nous est particulièrement agréable de remercier la maison Masson, en la personne notamment de M. J. F. Le Grand. Nous tenons également à remercier bien vivement M. A. Warusfel, dont l'activité et le dévouement ont beaucoup contribué à la conception et à l'élaboration de cette Collection.

P. G. CIARLET J. L. LIONS

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

Notations générales

E'	espace dual de E
$<\, ,\, >$	produit scalaire dans la dualité E', E
$[f = \alpha] = \{x\,; f(x) = \alpha\}$	
$B(x_0, r) = \{x\,; \|x - x_0\| < r\}$	boule ouverte, centrée en x_0 de rayon r
$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leqslant 1\}$	
$\mathrm{epi}\ \varphi = \{(x, \lambda);\ \varphi(x) \leqslant \lambda\}$	épigraphe de φ
φ^*	fonction conjuguée de φ
$\mathscr{L}(E, F)$	espace des opérateurs linéaires continus de E dans F
$M^\perp$	orthogonal de M
$D(A)$	domaine de l'opérateur A
$G(A)$	graphe de l'opérateur A
$N(A)$	noyau de l'opérateur A
$R(A)$	image de l'opérateur A
$\sigma(E, E')$	topologie faible définie sur E
$\sigma(E', E)$	topologie faible $*$ définie sur E'
$\rightharpoonup$	convergence faible
J	injection canonique de E dans E''
p'	exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
p.p.	presque partout
$\|A\|$	mesure (de Lebesgue) de l'ensemble A
$\mathrm{Supp}\, f$	support de la fonction f
$f * g$	produit de convolution
ρ_n	suite régularisante
$(\tau_h f)(x) = f(x + h)$	translaté de la fonction f
$\omega \subset\subset \Omega$	ouvert ω fortement inclus dans Ω, c'est-à-dire $\bar{\omega}$ compact et $\bar{\omega} \subset \Omega$
P_K	projection sur le convexe fermé K
$\|\ \|$	norme Hilbertienne
$\rho(T)$	ensemble résolvant de l'opérateur T
$\sigma(T)$	spectre de l'opérateur T
$VP(T)$	valeur propre de l'opérateur T
$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$	résolvante de l'opérateur A
$A_\lambda = AJ_\lambda$	régularisée Yosida de l'opérateur A

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \mathrm{grad}\ u$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplacien de } u$$

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R},\ x_N > 0\}$$

$Q \quad = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R};\ |x'| < 1 \text{ et } |x_N| < 1\}$
$Q_+ \ = Q \cap \mathbb{R}^N_+$
$Q_0 \ = \{x \in Q;\ x_N = 0\}$
$(D_h u)(x) = \dfrac{1}{|h|}(u(x+h) - u(x))$
$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ dérivée normale extérieure

Espaces fonctionnels

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert,
$\partial\Omega = \Gamma =$ frontière de Ω,
$L^p(\Omega) = \{u$ mesurable sur Ω et $\int_\Omega |u|^p\,dx < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$,
$L^\infty(\Omega) = \{u$ mesurable sur Ω et il existe C tel que $|u(x)| \leqslant C$ p.p. sur $\Omega\}$
$C_c(\Omega)$ fonctions continues à support compact dans Ω
$C^k(\Omega)$ fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier $\geqslant 0$)
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geqslant 0} C^k(\Omega)$
$C^k_c(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$
$C^\infty_c(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$
$C(\bar\Omega)$ fonctions continues sur $\bar\Omega$
$C^k(\bar\Omega)$ fonctions u de $C^k(\Omega)$ telles que pour chaque multi-indice α, $|\alpha| \leqslant k$, l'application $x \in \Omega \mapsto D^\alpha u(x)$ se prolonge continûment sur $\bar\Omega$
$C^\infty(\bar\Omega) = \bigcap_k C^k(\bar\Omega)$
$C^{0,\alpha}(\bar\Omega) = \left\{u \in C(\Omega);\ \sup_{x,y \in \Omega} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\right\}$ avec $0 < \alpha < 1$
$C^{k,\alpha}(\bar\Omega) = \{u \in C^k(\Omega);\ D^j u \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)\ \ \forall j,\ |j| \leqslant k\}$
$W^{1,p}$, $W^{1,p}_0$, $W^{m,p}$, H^1, H^1_0, H^m espaces de Sobolev.

INTRODUCTION

Cet ouvrage reprend sous une forme sensiblement plus élaborée un cours de Maîtrise enseigné à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Il suppose connus les éléments de base de Topologie générale, d'Intégration et de Calcul différentiel.

La première partie du cours (Chapitres I à VII) développe des résultats « abstraits » d'Analyse Fonctionnelle. La seconde partie (Chapitres VIII à X) concerne l'étude d'espaces fonctionnels « concrets » qui interviennent en théorie des équations aux dérivées partielles ; on y montre comment des théorèmes d'existence « abstraits » permettent de résoudre des équations aux dérivées partielles. Ces deux branches de l'Analyse sont étroitement liées. Historiquement, l'Analyse Fonctionnelle « abstraite » s'est d'abord développée pour répondre à des questions soulevées par la résolution d'équations aux dérivées partielles. Inversement, les progrès de l'Analyse Fonctionnelle « abstraite » ont considérablement stimulé la théorie des équations aux dérivées partielles. Ce cours ne contient aucune référence historique; nous recommandons au lecteur de consulter l'ouvrage de J. Dieudonné [3]. Nous espérons que ce livre pourra être utile tant aux étudiants intéressés par les « Mathématiques Pures » qu'à ceux qui désirent s'orienter vers les « Mathématiques Appliquées ».

Je remercie

– M. G. Tronel qui m'a suggéré de nombreuses améliorations.

– MM. Ph. Ciarlet et P. Rabinowitz pour leurs précieux conseils et encouragements.

– MM. Berestycki, Gallouet, Kavian, Mc Intosh pour leurs remarques utiles.

– Le Mathematics Research Center, University of Wisconsin, et le Department of Mathematics, University of Chicago, où des parties de ce livre ont été rédigées.

Je dédie ce livre à la mémoire de Guido Stampacchia, en hommage à un Maître de l'Analyse Fonctionnelle, disparu prématurément.

H. BREZIS

Avertissements

1) La notation [EX] fait référence à l'ouvrage de H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Recueil de Problèmes et Exercices* Masson , (épuisé).

Certains résultats *énoncés* dans ce volume sont *démontrés* en exercices dans [EX].

2) Certains énoncés ou paragraphes sont précédés du symbole •; il s'agit de passages **très importants.** Le symbole * précède certains énoncés qui peuvent être omis en première lecture.

3) Nous avons adopté une numérotation continue pour les propositions, théorèmes et corollaires; seuls les lemmes sont numérotés séparément.

4) Dans tout cet ouvrage nous considérons uniquement des **espaces vectoriels sur** $\mathbb{R}$ (ce qui est regrettable, mais simplifie la présentation). La plupart des énoncés restent valables pour les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$; quelques modifications sont parfois nécessaires. Dans [EX] on dresse la liste des changements à apporter lorsque l'on travaille avec des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

I

LES THÉORÈMES DE HAHN-BANACH. INTRODUCTION A LA THÉORIE DES FONCTIONS CONVEXES CONJUGUÉES

I.1. Forme analytique du théorème de Hahn-Banach : prolongement des formes linéaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Rappelons qu'une **forme linéaire** est une application linéaire définie sur E, ou sur un sous-espace vectoriel de E, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$. Le résultat essentiel du § I.1 concerne le prolongement d'une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel de E en une forme linéaire définie sur E tout entier.

Théorème I.1 (Hahn-Banach, forme analytique). — ***Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant***

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E \qquad \textit{et} \qquad \forall \lambda > 0, \tag{1}$$

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E. \tag{2}$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in G. \tag{3}$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e.

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E. \tag{4}$$

La démonstration du théorème I.1 fait appel au lemme de Zorn dont nous rappelons l'énoncé. Commençons par préciser quelques notions de la théorie des ensembles ordonnés.

Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre (partiel) notée $\leqslant$. On dit qu'un sous-ensemble $Q \subset P$ est **totalement ordonné** si pour tout couple a, b de Q on a (au moins) l'une des relations $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.

Soit $Q \subset P$ un sous-ensemble de P ; on dit que $c \in P$ est un **majorant de Q** si pour tout $a \in Q$ l'on a $a \leqslant c$.

On dit que $m \in P$ est un élément **maximal** de P si pour tout $x \in P$ tel que $m \leqslant x$ on a nécessairement $x = m$.

Enfin, on dit que P est **inductif** si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme I.1 (Zorn). – *Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.*

On trouvera une démonstration du lemme de Zorn (à partir de l'axiome du choix) dans N. Dunford-J. Schwartz [1] (Vol. 1, Théorème 1.2.7.), P. Dubreil-M. L. Dubreil Jacotin [1] (Chap. 6) ou bien dans Lang [1].

Remarque 1. – Il n'est pas indispensable pour un analyste de connaître la démonstration du lemme de Zorn, par contre il est **essentiel** de bien comprendre l'énoncé et de savoir l'utiliser. Le lemme de Zorn a de nombreuses et très importantes applications en Analyse ; c'est un outil indispensable pour établir certains résultats **d'existence.**

Démonstration du théorème I.1. – On considère l'ensemble

$$P = \left\{ h \,\middle|\, \begin{array}{l} h : D(h) \subset E \to \mathbb{R} \text{ avec } D(h) \text{ sous-espace vectoriel de E, } h \text{ linéaire,} \\ G \subset D(h),\ h \text{ prolonge } g \text{ et } h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h) \end{array} \right\}.$$

P est muni de la relation d'ordre

$$(h_1 \leqslant h_2) \Leftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1).$$

Il est clair que P n'est pas vide puisque $g \in P$. D'autre part, P est inductif. En effet soit $Q \subset P$ un sous-ensemble totalement ordonné ; on note $Q = (h_i)_{i \in I}$. On définit

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \qquad \text{et} \qquad h(x) = h_i(x) \qquad \text{si} \qquad x \in D(h_i).$$

On vérifie que cette définition a bien un sens, que $h \in P$ et que h est un majorant de Q. Il résulte du lemme de Zorn que P admet un élément maximal noté f. Prouvons que $D(f) = E$ – ce qui achèvera la démonstration du théorème I.1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $D(f) \neq E$. Soit $x_0 \notin D(f)$; posons $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$ et, pour $x \in D(f)$, $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ $(t \in \mathbb{R})$ où α est une constante qui sera fixée ultérieurement de manière à ce que $h \in P$. On doit donc s'assurer que

$$f(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Grâce à (1) il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leqslant p(x + x_0) & \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leqslant p(x - x_0) & \forall x \in D(f). \end{cases}$$

Autrement dit, il faut choisir α tel que

$$\operatorname*{Sup}_{y \in D(f)} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leqslant \alpha \leqslant \operatorname*{Inf}_{x \in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}.$$

Un tel choix est possible puisque

$$f(y) - p(y - x_0) \leqslant p(x + x_0) - f(x) \qquad \forall x \in D(f), \quad \forall y \in D(f);$$

en effet on notera que

$$f(x) + f(y) \leqslant p(x + y) \leqslant p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

grâce à (2).
On conclut que f est majorée par h et que $f \neq h$; ceci contredit la maximalité de f.

Indiquons maintenant quelques applications simples du théorème I.1 lorsque E est un **espace vectoriel normé** (e.v.n.) de norme $\|\ \|$.
Notation : On désigne par E′ le dual (topologique) ([1]) de E i.e. l'espace des **formes linéaires et continues sur E**; E′ est muni de la **norme duale** ([2])

$$(5) \qquad \|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} f(x).$$

Lorsque $f \in E'$ et $x \in E$ on notera généralement $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$; on dit que $\langle\ ,\ \rangle$ est le **produit scalaire dans la dualité** E′, E.

• **Corollaire I.2.** — *Soit* G *un sous-espace vectoriel de* E *et soit* $g : G \to \mathbb{R}$ *une application linéaire et continue de norme*

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leqslant 1}} g(x).$$

Alors il existe $f \in E'$ *qui prolonge* g *et tel que*

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Démonstration. — Appliquer le théorème I.1 avec $p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|$.

• **Corollaire I.3.** — *Pour tout* $x_0 \in E$ *il existe* $f_0 \in E'$ *tel que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \qquad et \qquad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

Démonstration. — Appliquer le corollaire I.2 avec $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ de sorte que $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$.

Remarque 2. — L'élément f_0 défini au corollaire I.3 n'est pas unique en général (essayer de fabriquer un exemple ou voir [EX]). Néanmoins si E′ est **strictement convexe** ([3]) — ce qui est le cas par exemple si E est un espace de Hilbert (voir chapitre V) ou bien si $E = L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ (voir chapitre IV) — alors f_0 est unique. De manière générale on note, pour chaque $x_0 \in E$,

$$F(x_0) = \{f_0 \in E'; \ \|f_0\| = \|x_0\| \text{ et } \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2\}.$$

([1]) Dans la littérature américaine le dual topologique de E est désigné par E*. Attention aux confusions !

([2]) En général on écrira simplement $\|f\|$ au lieu de $\|f\|_{E'}$ sauf s'il y a une ambiguité.

([3]) On dit qu'un espace vectoriel normé E est **strictement convexe** si $\forall x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$ et $x \neq y$ on a $\|tx + (1 - t)y\| < 1 \ \forall t \in]0, 1[$.

L'application (multivoque) $x_0 \longmapsto F(x_0)$ est **l'application de dualité** de E dans E'; on trouvera certaines de ses propriétés dans [EX].

• **Corollaire I.4.** — *Pour tout $x \in E$ on a*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle f, x\rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle f, x\rangle|. \tag{6}$$

DÉMONSTRATION. — Supposons que $x \neq 0$. Il est clair que

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle f, x\rangle| \leqslant \|x\|.$$

D'autre part (corollaire I.3) on sait qu'il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x\|$ et $\langle f_0, x\rangle = \|x\|^2$. On pose $f_1 = \|x\|^{-1} f_0$ de sorte que $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x\rangle = \|x\|$.

REMARQUE 3. — Il convient de distinguer la formule (5) qui est une **définition** et la formule (6) qui est un **résultat.** En général, le « Sup » qui apparaît dans (5) n'est pas un « Max » i.e. il n'**est pas atteint** (voir un exemple dans [EX]). Toutefois ce « Sup » est atteint si E est un espace de Banach réflexif (voir chapitre III); un théorème difficile dû à R. C. James affirme la réciproque : si E est un espace de Banach tel que pour tout $f \in E'$ le « Sup » en (5) est atteint, alors E est réflexif (voir par exemple Diestel [1], chapitre I ou Holmes [1]).

I.2. Formes géométriques du théorème de Hahn-Banach : séparation des ensembles convexes

Commençons par quelques préliminaires sur les hyperplans. Dans toute la suite E désigne un e.v.n.

Définition. — *Un* **hyperplan** (*affine*) *est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E\,;\ f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire [1] *sur* E, **non identiquement nulle** *et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que* H *est l'***hyperplan d'équation** $[f = \alpha]$.

Proposition I.5. — ***L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.***

DÉMONSTRATION. — Il est clair que si f est continue alors H est fermé. Réciproquement, supposons que H est fermé. Le complémentaire $\complement H$ de H est ouvert et non vide (puisque

---

(1) Pas nécessairement continue (lorsque E est de dimension infinie il existe toujours des formes linéaires non continues; voir [EX]).

$f \not\equiv 0$). Soit $x_0 \in \complement H$ et supposons (pour fixer les idées) que $f(x_0) < \alpha$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \complement H$ où

$$B(x_0, r) = \{x \in E;\ \|x - x_0\| < r\}.$$

On a

$$f(x) < \alpha \qquad \forall x \in B(x_0, r). \tag{7}$$

En effet supposons que $f(x_1) > \alpha$ pour un certain $x_1 \in B(x_0, r)$. Le segment

$$\{x_t = (1 - t)x_0 + tx_1\ ;\ t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans $B(x_0, r)$ et donc $f(x_t) \neq \alpha$ $\forall t \in [0, 1]$; par ailleurs $f(x_t) = \alpha$ pour $t = \dfrac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)}$, ce qui est absurde et donc (7) est démontré. Il résulte de (7) que

$$f(x_0 + rz) < \alpha \qquad \forall z \in B(0, 1).$$

Par conséquent f est continue et $\|f\| \leqslant \dfrac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

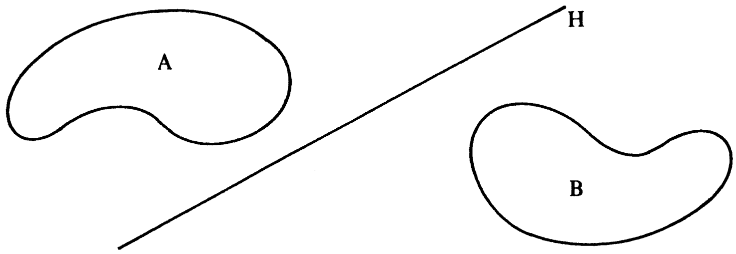
Définition. — Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ **sépare A et B au sens large** si l'on a

$$\boxed{f(x) \leqslant \alpha \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(x) \geqslant \alpha \quad \forall x \in B.}$$

On dit que H **sépare A et B au sens strict** s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\boxed{f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(x) \geqslant \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.}$$

Géométriquement la séparation exprime que A et B se situent « **de part et d'autre de H** ».



Rappelons enfin qu'un ensemble $A \subset E$ est **convexe** si

$$tx + (1 - t)y \in A \qquad \forall x, y \in A, \qquad \forall t \in [0, 1].$$

• **Théorème I.6 (Hahn-Banach, première forme géométrique).** — *Soient* **A** $\subset$ **E** *et* **B** $\subset$ **E** *deux ensembles convexes, non vides et disjoints. On suppose que* **A** *est* **ouvert.** *Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare* **A** *et* **B** *au sens large.*

La démonstration du théorème I.6 est basée sur les deux lemmes suivants

Lemme I.2 (Jauge d'un convexe). — *Soit* **C** $\subset$ **E** *un convexe ouvert avec* **0** $\in$ **C.** *Pour tout* $x \in$ **E** *on pose :*

$$\mathbf{p(x) = Inf\,\{\alpha > 0;\ \alpha^{-1}x \in C\}} \tag{8}$$

(on dit que p est la jauge de **C***).*

Alors p vérifie* (1), (2) *et

(9) $\quad$ ***il existe* $\mathbf{M}$ *tel que*** $\quad \mathbf{0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E,}$

(10) $\quad \mathbf{C = \{x \in E\,;\ p(x) < 1\}.}$

Démonstration du lemme I.2. — Soit $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$; il est clair que

$$p(x) \leqslant \frac{1}{r}\|x\| \qquad \forall x \in E.$$

D'où (9).

La propriété (1) est évidente.

Prouvons (10). Supposons d'abord que $x \in C$; comme C est ouvert, $(1 + \varepsilon)x \in C$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Donc $p(x) \leqslant \dfrac{1}{1 + \varepsilon} < 1$. Inversement si $p(x) < 1$ il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\alpha^{-1}x \in C$ et donc $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0 \in C$.

Prouvons (2). Soient $x, y \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après (1) et (10) on sait que $\dfrac{x}{p(x) + \varepsilon} \in C$ et $\dfrac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C$. Donc $\dfrac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \dfrac{(1 - t)y}{p(y) + \varepsilon} \in C$ pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier pour $t = \dfrac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$ on obtient $\dfrac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C$. On en déduit, grâce à (1) et (10), que $p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. D'où (2).

Lemme I.3. — ***Soit* $\mathbf{C \subset E}$ *un convexe ouvert non vide et soit* $x_0 \in \mathbf{E}$ *avec* $x_0 \notin \mathbf{C}$. *Alors il existe* $f \in \mathbf{E}'$ *tel que* $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in \mathbf{C}$. *En particulier l'hyperplan d'équation* $[f = f(x_0)]$ *sépare* $\{x_0\}$ *et* C *au sens large.***

Démonstration du lemme I.3. — Par translation on peut toujours supposer que $0 \in C$ et introduire la jauge de C (lemme I.2) notée p. On considère $G = \mathbb{R}x_0$ et la forme linéaire g définie sur G par

$$g(tx_0) = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in G$$

(prendre $x = tx_0$ et distinguer les cas $t > 0$ et $t \leqslant 0$). Grâce au théorème I.1, il existe une forme linéaire f sur E, qui prolonge g, et telle que

$$f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E.$$

En particulier on a $f(x_0) = 1$ et f est continue grâce à (9). D'autre part on déduit de (10) que $f(x) < 1$ pour tout $x \in C$.

Démonstration du théorème I.6. — On pose $C = A - B$ de sorte que C est convexe (vérification facile), C est ouvert (noter que $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$) et $0 \notin C$ (puisque $A \cap B = \varnothing$). D'après le lemme I.3 il existe $f \in E'$ tel que

$$f(z) < 0 \qquad \forall z \in C$$