ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3

ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3

Cours et exercices corrigés

Patrice Tauvel
Professeur à l'université de Poitiers

DUNOD

Illustration de couverture : digitalvision®

Conseiller scientifique : Sinnou David

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-081085-7

Table des matières

Avant-propos

Les résultats concernant la théorie des fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes sont très nombreux, car c'est une théorie relativement ancienne (et la recherche dans ce domaine des mathématiques est toujours très active). Pour aborder cette théorie, l'étudiant aura intérêt à procéder par étapes. Ce livre peut être vu comme la première de ces étapes. Donnons quelques explications à ce sujet.

Les connaisances pour aborder la lecture de l'ouvrage sont plutôt modestes. En ce qui concerne la topologie, on ne demande de connaître que les propriétés élémentaires des compacts et des connexes de $\mathbb{C}$. Pour l'intégration, à l'exception d'un complément donné au chapitre 7 (et qui n'est pas utilisé dans la suite de l'ouvrage), on n'a utilisé que les propriétés élémentaires de l'intégrale au sens de Riemann. En ce qui concerne le calcul différentiel, il n'est quasiment utilisé que la notion d'application différentiable. Il en résulte qu'un étudiant de troisième année de Licence dispose de toute la matière nécessaire pour aborder la lecture du livre. Donnons quelques détails quant à son contenu.

Les chapitres 1 à 3 constituent des révisions concernant un programme usuel de Licence. On y traite de séries numériques, de séries de fonctions, et de séries entières. Il nous semble en effet opportun de rappeler les points essentiels concernant ces notions (par exemple la définition du rayon de convergence d'une série entière).

Le chapitre 4 traite des fonctions analytiques. Bien que ne présentant aucune difficulté, on obtient déjà des résultats importants (principe du prolongement analytique, principe des zéros isolés).

Au chapitre 5, on généralise la notion de dérivabilité au cas des fonctions d'une variable complexe. Il est aussi question des déterminations continues de l'argument, un point qui sera essentiel dans d'autres chapitres.

Le chapitre 6 est fondamental. On y montre qu'une fonction est dérivable (on dit aussi holomorphe) si et seulement si elle est localement développable en série entière. C'est là une énorme différence avec le cas réel déjà vu par l'étudiant.

Dans les chapitres 7 et 8, on utilise la théorie de Cauchy locale pour obtenir les principales propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes. On y démontre, par exemple, la fameuse formule des résidus (dans des cas particuliers) qui permettra, et c'est parfois ce qui impressionne l'étudiant, de calculer des intégrales.

Les chapitres 9 et 11 sont consacrés à l'étude des produits infinis. C'est une notion très intéressante, mais aussi plus délicate que celle de série. Au chapitre 11, on montre en particulier l'existence de fonctions holomorphes ayant des zéros imposés.

Au chapitre 10, on traite, dans un cadre plus général, des questions vues dans les chapitres 7 et 8. On introduit en particulier la notion d'homotopie (on essaie de déformer des courbes de manière continue).

Le chapitre 12 est consacré d'une part à des questions topologiques (théorème de Montel) et d'autre part à la représentation conforme (théorème de Riemann). On y démontre en particulier à quelle condition deux ouverts de $\mathbb{C}$ sont analytiquement isomorphes.

Au chapitre 13, on démontre trois résultats fameux : deux théorèmes de Picard et le théorème de Runge. Les deux premiers sont spectaculaires, le troisième est fondamental en ce qui concerne l'approximation des fonctions.

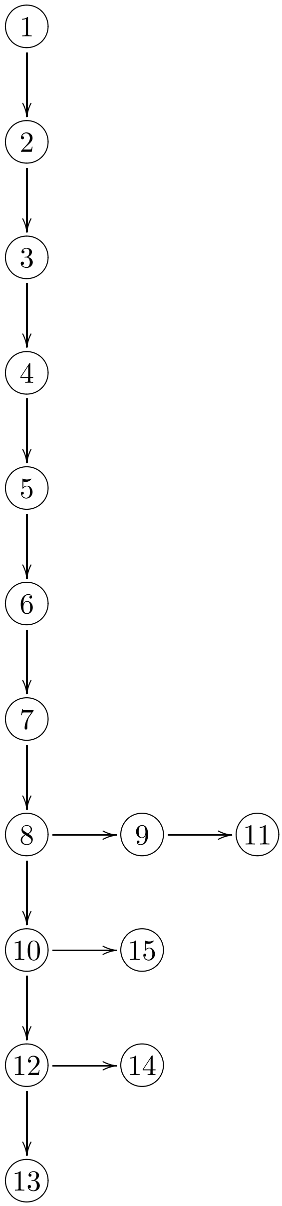
Au chapitre 14, on aborde l'étude des fonctions harmoniques de deux variables réelles. Ces fonctions sont très utilisées dans de nombreux domaines scientifiques. On prouve en particulier qu'une telle fonction est indéfiniment différentiable.

Le chapitre 15 donne quelques méthodes (en nombre très limité) de calculs d'intégrales en utilisant la formule des résidus. Nous renvoyons cependant le lecteur à des livres d'exercices (ou à des séances de travaux dirigés) pour ce qui concerne ce point.

Comme nous l'avons déjà précisé, ce livre, qui se veut d'un niveau relativement élémentaire, n'aborde que quelques aspects de la théorie des fonctions holomorphes. Nous n'avons en particulier traité que le cas des fonctions holomorphes d'une variable. Pour l'étudiant qui veut se spécialiser dans ce domaine, il peut être une introduction à des ouvrages de niveau plus élevé. Nous conseillons en particulier les livres [4], [6], [8], [9], [10] de la bibliographie.

Signalons aussi que le contenu de cet ouvrage couvre entièrement la partie du programme de l'agrégation de mathématiques qui concerne les fonctions holomorphes.

Diagramme d’implication des différents chapitres :



Chapitre 1

Séries numériques

Dans ce chapitre, on fait quelques rappels concernant les séries numériques.

1.1 NOTATIONS ET RAPPELS

1.1.1. Soient E, F des ensembles et A une partie de E.

On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et id_E l'application identité de E.

On désigne par $E \backslash F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F, et par $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. On écrira souvent $f \colon E \to F$ pour signifier que $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et on note $f|A$ la restriction de f à A.

Si E est fini, $\mathrm{card}(E)$ est le cardinal de E.

1.1.2. Les symboles

$$\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{N}^*\ ,\ \mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{R}\ ,\ \mathbb{R}^*\ ,\ \mathbb{R}_+\ ,\ \mathbb{R}_-\ ,\ \mathbb{R}_+^*\ ,\ \mathbb{R}_-^*\ ,\ \mathbb{C}\ ,\ \mathbb{C}^*$$

ont la signification usuelle bien connue de tous. Si z est un nombre complexe, on note $\overline{z}$ son conjugué et $\mathrm{Re}(z)$ (respectivement $\mathrm{Im}(z)$) sa partie réelle (respectivement partie imaginaire).

Dans la suite de ce chapitre $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.3. Soit X un espace métrique dont la distance est notée d. Rappelons qu'une suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de X est appelée une *suite de Cauchy* si elle vérifie la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ dès que $m \geqslant N$ et $n \geqslant N$.

Définition. *Un espace métrique X est dit* complet *si toute suite de Cauchy d'éléments de X a une limite dans X. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et complet est appelé un* espace de Banach.

Théorème 1.1.4. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach. En particulier, le corps $\mathbb{K}$ est complet.*

1.2 LIMITE SUPÉRIEURE ET LIMITE INFÉRIEURE

1.2.1. On adjoint à $\mathbb{R}$ les symboles usuels $-\infty$ et $+\infty$, et on pose :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On prolonge la relation d'ordre naturelle de $\mathbb{R}$ en convenant que, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$-\infty < a < +\infty.$$

1.2.2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles et $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ constitué des suites convergentes.

Définition. *Soit $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{S}$. On dit que x* converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ *si elle vérifie l'une ou l'autre des conditions suivantes :*
(i) $x \in \mathcal{C}$
(ii) x_n *tend vers* $+\infty$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.
(iii) x_n *tend vers* $-\infty$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.
On désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ qui convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarques. 1) Si $x_n = (-1)^n$, on a $x \notin \mathcal{R}$.

2) Si $x_n = n$, alors $x \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$. Par suite $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{R} \subsetneq \mathcal{S}$.

3) L'ensemble $\mathcal{R}$ n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. Si $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ vérifient $x_n = n + (-1)^n$ et $y_n = -n$, on a $x, y \in \mathcal{R}$ et $x + y \notin \mathcal{R}$.

1.2.3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée (respectivement minorée), on note $\sup A$ (respectivement $\inf A$) la borne supérieure (respectivement inférieure) de A. Si A est non majorée (respectivement non minorée), on pose $\sup A = +\infty$ (respectivement $\inf A = -\infty$).

Lemme 1.2.4. *Soit $x = (x_n) \in \mathcal{S}$. Si $p \in \mathbb{N}$, on pose $X_p = \{x_n\,;\, n \geqslant p\}$.*
(i) *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que* $\sup X_q = +\infty$, *alors* $\sup X_p = +\infty$ *pour tout $p \in \mathbb{N}$.*
(ii) *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que* $\inf X_q = -\infty$, *alors* $\inf X_p = -\infty$ *pour tout $p \in \mathbb{N}$.*