Algèbre
1re année

2e édition

François Liret, Dominique Martinais

Algèbre 1re année

2e édition

DUNOD

Couverture : tostphoto. Adobe Stock

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082691-9

Préface

Pourquoi publier un nouveau manuel ? Après tout, au cours des dix et même des vingt dernières années les programmes ont peu changé : tout au plus un chapitre un peu marginal se trouve-t-il parfois ajouté, parfois supprimé. Dans l'ensemble ce que doivent, ce que peuvent apprendre étudiantes et étudiants durant leurs deux premières années à l'université demeure à peu près stable.

Mais tout le reste est profondément modifié. La société d'aujourd'hui ne ressemble plus à celle d'hier, les lycées et leurs élèves ont changé, et aussi leurs professeurs. L'enseignement dans les universités lui non plus n'est pas resté figé.

Cette évolution, d'ailleurs preuve de vitalité, doit se traduire aussi dans les ouvrages proposés à celles et ceux qui abordent maintenant les études universitaires : le public d'aujourd'hui mérite des livres qui ont été écrits pour lui, par des auteurs qui ont suivi et qui ont compris son évolution.

Telle est l'ambition de cette collection de premier cycle de mathématiques confiée à François Liret et Dominique Martinais qui apporte à ses lecteurs non seulement une présentation impeccable plaisante à l'œil et donc facile à lire, mais surtout le fruit d'années d'expérience et de réflexion sur la manière de rédiger un texte scientifique, sur l'importance respective de la présentation des *outils* qu'ils devront apprendre à manier, des *démonstrations* qui sont l'âme des mathématiques et des *explications* indispensables à la compréhension de celles-ci. Le cours est illustré d'exemples et d'exercices judicieux, qui apporte aux lecteurs tout ce qui leur est nécessaire pour réussir pleinement leurs études.

Michel Zisman

Professeur émérite de l'université Paris 7 - Denis Diderot

Table des matières

Chapitre 12. Anneaux et corps

Avant-Propos

Nous avons voulu que ce cours de première année reste élémentaire et que les résultats en soient démontrés soigneusement. L'exposé est en général très détaillé : nous espérons qu'il permettra aux étudiants d'apprendre à raisonner. Nous avons également tenu à présenter les algorithmes de calcul qu'il est nécessaire de pratiquer et à mettre en évidence des conseils pour chercher les exercices. Lorsque dans le texte, l'un des mots théorème, proposition ou corollaire est souligné, c'est qu'il s'agit d'un énoncé important.

Puisse ce manuel aider les étudiants dans leur apprentissage des mathématiques.

Nous devons un grand merci à Michel Zisman qui nous a patiemment relus et dont les conseils et nombreuses suggestions nous ont été très utiles. Merci également à Alberto Arabia qui a mis son talent et sa compétence en informatique au service de la mise en page. Enfin nous remercions Anne Bourguignon qui s'est chargée avec efficacité de l'édition de ce livre.

Les auteurs

A l'occasion de cette réédition d'Algèbre-première année, on a ponctuellement précisé et complété le cours, sans toutefois y introduire de nouveaux développements. On a surtout voulu proposer de nouveaux exercices d'entraînement presque tous entièrement corrigés, et pour d'autres, des indications ou des réponses supplémentaires. On s'est aussi efforcé de corriger les fautes.

Principales notations utilisées

Quelques lettres grecques employées en mathématiques

α	alpha	ε	epsilon	$\lambda,\ \Lambda$	lambda	$\sigma,\ \Sigma$	sigma
β	bêta	ζ	zêta	μ	mu	$\varphi,\ \Phi$	phi
$\gamma,\ \Gamma$	gamma	η	êta	$\pi,\ \Pi$	pi	$\psi,\ \Psi$	psi
$\delta,\ \Delta$	delta	θ	thêta	ρ	rho	$\omega,\ \Omega$	oméga

Principales notations utilisées

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	anneau des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	corps des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	corps des nombres complexes
$E \setminus A$	complémentaire de la partie A dans l'ensemble E
$E \times F$	produit cartésien des ensembles E et F
$f : A \to B$	application d'un ensemble A dans un ensemble B
f^{-1}	bijection réciproque de la bijection f
id_E	application identique de l'ensemble E
$\mathrm{Card}\, A$	cardinal de l'ensemble fini A
C_n^p	nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments
$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$	partie réelle, partie imaginaire du nombre complexe z
$\lvert z\rvert$, $\mathrm{Arg}\, z$	module, argument du nombre complexe z
$\mathrm{pgcd}(a, b)$	plus grand commun diviseur de a et b
$\mathrm{ppcm}(a, b)$	plus petit commun multiple de a et b
$a \equiv b\ [n]$	a est congru à b modulo n
$\mathbf{K}$	désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathbf{K}[X]$	anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$
$\deg P$	degré du polynôme P
$\mathbf{K}(X)$	corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbf{K}$
$M_{n,p}(\mathbf{K})$	ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$
$M_n(\mathbf{K})$	anneau des matrices carrées à n lignes à coefficients dans $\mathbf{K}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$	groupe des matrices carrées inversibles à n lignes à coefficients dans $\mathbf{K}$
$\det A$	déterminant de la matrice carrée A
$\dim E$	dimension de l'espace vectoriel E
$\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$	image, noyau de l'application linéaire f
$\mathscr{S}_n$	groupe symétrique

Chapitre 1

S'exprimer en mathématiques

Sous leur apparente diversité, les expressions employées en mathématiques se classent en quelques types réservés à des situations logiques précises. Quant aux raisonnements mathématiques, même les plus complexes, ils consistent en un enchaînement de déductions obéissant à un petit nombre de règles.

1. Les énoncés

La plupart des phrases que l'on rencontre dans un livre de mathématiques concernent des objets mathématiques. Les phrases qui ont pour but de définir de tels objets, ou bien d'en affirmer des propriétés, ou simplement de les introduire s'appellent des *énoncés*.

Voici des exemples d'énoncés. Nous convenons qu'un entier positif n'est pas nul.

(1) Le nombre $\dfrac{7^{11}-7}{11}$ est un entier positif.

(2) Soit x un nombre réel strictement positif.

(3) Il existe un entier naturel plus grand que 2^{100}.

(4) Posons $a = \int_0^1 e^{t^2}\,dt$.

(5) Si n est un entier relatif, alors $16n^2 - 48n + 33$ est un entier positif.

(6) Si x est un nombre réel, le plus grand des nombres x et $-x$ s'appelle la valeur absolue de x.

(7) Notons I l'intervalle $[0, 1]$.

(8) Si n est un entier positif, alors n est impair ou $n(n+2)(n+3)$ est multiple de 4.

(9) Pour tout nombre réel x tel que $x^2 > 2$, on a $x > 1$.

(10) Si x est un nombre réel, la valeur absolue de x se note $|x|$.

Certains énoncés affirment une propriété : ce sont des *propositions*. Par exemple, (1), (3), (5), (8) et (9) sont des propositions.

Un énoncé comme (2) permet de se donner un objet mathématique, en l'introduisant en général par le mot « soit ».

L'énoncé (6) définit et nomme un nouvel objet (la valeur absolue d'un nombre réel). Dans un livre de mathématiques, un tel énoncé s'appelle une **définition**.

Enfin, il y a des énoncés, comme (4), (7) ou (10), qui indiquent simplement que l'on va désigner par un certain symbole un objet précédemment défini : ce sont des *notations*. Une notation est le plus souvent introduite par l'un des mots « **posons** » ou « **notons** ».

Les propositions

Elles sont coordonnées par des conjonctions comme « **donc** », « **d'où** », « **par suite** », « **par conséquent** », « **car** », « **puisque** », « **si et seulement si** », ou par des expressions comme « **il s'ensuit** », « **on en déduit** », « **il vient** », « **on obtient** », ou simplement « **on a** », ou encore par l'expression « **si** ..., **alors** ... ».

Certaines propositions sont des expressions mathématiques écrites sous forme purement symbolique, comme par exemple $\sqrt{6}<5/2$, ou encore $\int_0^\pi \sin t\,dt=2$. Ces propositions n'étant pas des phrases, on doit les employer en utilisant des formes grammaticales correctes, notamment en ce qui concerne les verbes. Par exemple, il convient d'écrire « puisqu'on a $6<25/4$, on en déduit $\sqrt{6}<5/2$ » et non pas « $\sqrt{6}<5/2$ car $6<25/4$ ». Cependant, pour ne pas alourdir le style, des libertés sont permises, à la condition expresse qu'elles ne nuisent pas au sens. L'expression « on a $\sqrt{6}<5/2$ car $6<25/4$ » est ainsi permise, bien qu'elle soit incorrecte selon les règles de la grammaire française.

Une proposition est soit vraie, soit fausse
et elle ne peut être à la fois vraie et fausse.

La proposition (1) est vraie, ainsi que (3). La proposition (5), du type « si ..., alors ... », est constituée de deux propositions. La première est la proposition P : « n est un entier relatif » et la seconde est la proposition Q : « $16n^2-48n+33$ est un entier positif ». La proposition « si P, alors Q » affirme que si P est vraie, alors Q est vraie également. Cette proposition (5) est vraie, de même que la proposition (8) qui est du même type.

La proposition (9) a également la structure « si ..., alors ... », car elle pourrait aussi bien se formuler sous la forme « si x est un nombre réel tel que $x^2>2$, alors on a $x>1$ ». Cette proposition (9) est fausse : en effet, -2 est un nombre réel, $(-2)^2$ est strictement plus grand que 2 et -2 n'est pas strictement plus grand que 1.

Voici les opérations que l'on peut effectuer avec des propositions.

La négation. Affirmer que la proposition P : « $\sqrt{2}$ n'est pas un entier naturel » est vraie, c'est exprimer que la proposition Q : « $\sqrt{2}$ est un entier naturel » n'est pas vraie, c'est-à-dire que la proposition Q est fausse. On dit que P est la négation de Q, ce qui se note $P = \mathrm{non}(Q)$.

De manière générale, si P est une proposition, alors une et une seule des propositions P ou $\mathrm{non}(P)$ est vraie et l'autre est fausse. Par suite, les propositions P et $\mathrm{non}\big(\mathrm{non}(P)\big)$ sont toutes les deux vraies ou bien toutes les deux fausses.

L'opération « ou ». Soit la proposition suivante, où n et p sont des entiers relatifs :

$$R : \text{ « } np \text{ est pair ou } n^2 - p^2 \text{ est multiple de } 8 \text{ ».}$$

Cette proposition est du type (P ou Q), où P est la proposition « np est pair » et où Q est la proposition « $n^2 - p^2$ est multiple de 8 ».

Par définition, une proposition de la forme (P ou Q) est vraie si l'une au moins des propositions P ou Q est vraie. Par exemple, si les propositions P et Q sont vraies toutes les deux, alors (P ou Q) est vraie aussi. Si P et Q sont fausses toutes les deux, alors la proposition (P ou Q) est fausse.

Revenons à notre exemple et choisissons $n = 5$ et $p = 3$. Alors la proposition « np est pair » est fausse et la proposition « $n^2 - p^2$ est multiple de 8 » est vraie, donc R est vraie lorsque $n = 5$ et $p = 3$. Si $n = 5$ et $p = 2$, la proposition « $n^2 - p^2$ est multiple de 8 » est fausse et la proposition « np est pair » est vraie, donc R est vraie. Lorsque $n = 6$ et $p = 2$, chacune des deux propositions « np est pair » et « $n^2 - p^2$ est multiple de 8 » est vraie, donc R est vraie aussi dans ce cas. Nous montrerons au paragraphe 2 qu'à chaque fois que l'on choisit des entiers relatifs n et p, la proposition R est vraie.

L'opération « et ». Considérons la proposition suivante, où x est un nombre réel :

$$R : \text{ « } x \text{ est strictement positif et } x^2 + 3x - 4 \text{ est strictement négatif ».}$$

Cette proposition est de la forme (P et Q) où P est la proposition « x est strictement positif » et où Q est la proposition « $x^2 + 3x - 4$ est strictement négatif ».

Par définition, une proposition de la forme (P et Q) est vraie si les propositions P et Q sont toutes les deux vraies. Si la proposition P est fausse ou si la proposition Q est fausse, alors la proposition (P et Q) est fausse.

Puisqu'on a $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$, la proposition « $x^2 + 3x - 4$ est strictement négatif » est vraie si et seulement si le nombre réel x vérifie les inégalités $-4 < x < 1$; la proposition R ci-dessus est donc vraie si et seulement si l'on a $0 < x < 1$.

L'implication. Si P et Q sont des propositions, la proposition « si P, alors Q » exprime que si P est vraie, alors Q est vraie aussi. Les propositions de ce type sont tellement utilisées qu'on leur a donné un nom : on les appelle des *implications*. La proposition « si P, alors Q » peut aussi s'exprimer par « P implique Q » ou encore par « P donc Q ».

Lorsque les propositions P et Q sont constituées de symboles mathématiques, et seulement dans ce cas, on peut utiliser le signe $\Rightarrow$ qui se lit « implique », ou encore « entraîne » et l'on écrit $P \Rightarrow Q$ pour exprimer que la proposition P implique la proposition Q.

Voici des exemples de formulations d'implication :

- si n est un entier positif, alors $n^3 - n$ est multiple de 3
- n est un entier positif implique que $n^3 - n$ est multiple de 3
- $6 < 25/4 \Rightarrow \sqrt{6} < 5/2$
- x appartient à l'intervalle $]-4, 1[$, donc $x^2 + 3x - 4$ est strictement négatif
- $x \in]-\infty, -4[\Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$.

Si P et Q sont des propositions, alors la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est vraie seulement dans l'un des cas suivants : ou bien P et Q sont vraies, ou bien P est fausse. Ainsi

> La proposition $(P \Rightarrow Q)$ est vraie si et seulement si la proposition $\big(\mathrm{non}(P)$ ou $Q\big)$ est vraie.

En particulier, si la proposition P est fausse, alors la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.

L'équivalence. La proposition $\big((P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)\big)$ se note $P \Leftrightarrow Q$. Le signe $\Leftrightarrow$ se lit « équivaut à » ou « si et seulement si ». Si P et Q sont des propositions vraies, alors la proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie ; si P est vraie et Q est fausse, alors la proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est fausse et de même si P est vraie et Q est fausse. Si P et Q sont des propositions fausses, alors la proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie. Lorsque la proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie, on dit aussi que les propositions P et Q sont *équivalentes*. Par exemple, lorsque z et z' sont des nombres complexes, on a l'équivalence

$$zz' = 0 \Longleftrightarrow (z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0).$$

Si P est une proposition, alors P et $\mathrm{non}\big(\mathrm{non}(P)\big)$ sont équivalentes. De plus, si P, Q et R sont des propositions, on vérifie que l'on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\mathrm{non}(P \text{ ou } Q) &\Longleftrightarrow \big(\mathrm{non}(P) \text{ et } \mathrm{non}(Q)\big)\\
\mathrm{non}(P \text{ et } Q) &\Longleftrightarrow \big(\mathrm{non}(P) \text{ ou } \mathrm{non}(Q)\big)\\
\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) &\Longleftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)\big)\\
\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) &\Longleftrightarrow \big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\big).
\end{aligned}$$