

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-Propos</b>	<b>vii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>Avertissement</b>	<b>xiii</b>
<b>Partie I Anneaux et modules</b>	<b>1</b>
<b>I Généralités sur les anneaux</b>	<b>3</b>
1 Définitions – Exemples . . . . .	3
2 Idéaux – Morphismes . . . . .	8
3 Idéaux maximaux, idéaux premiers . . . . .	15
4 Produit d’anneaux – Théorème chinois . . . . .	18
5 Caractéristique – Corps premiers . . . . .	20
6 Corps des fractions d’un anneau intègre . . . . .	22
<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>29</b>
TR.I.A. Étude de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . . . . .	29
TR.I.B. Localisation et idéaux . . . . .	31
TR.I.C. Radical, nilradical . . . . .	32
<b>II Anneaux euclidiens, principaux, factoriels</b>	<b>35</b>
1 Anneaux de polynômes . . . . .	35
2 Division euclidienne – Anneaux euclidiens . . . . .	41
3 Anneaux principaux . . . . .	43
4 Anneaux factoriels . . . . .	48
5 Divisibilité . . . . .	52

<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>55</b>
TR.II.A. Exemples d'anneaux euclidiens . . . . .	55
TR.II.B. Un anneau principal non euclidien . . . . .	56
TR.II.C. Anneaux noëthériens . . . . .	57
TR.II.D. Séries formelles – Séries et polynômes de Laurent . . . . .	58
<b>III Irréductibilité des polynômes – Polynômes symétriques</b>	<b>61</b>
1 Irréductibilité . . . . .	61
2 Fonctions polynomiales – Racines – Dérivations – Multiplicité . . . . .	66
3 Résultant – Discriminant . . . . .	74
4 Polynômes symétriques . . . . .	77
<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>83</b>
TR.III.A. Critère d'irréductibilité par extension . . . . .	83
TR.III.B. Critère d'irréductibilité par réduction . . . . .	83
<b>IV Généralités sur les modules</b>	<b>87</b>
1 Modules – Morphismes . . . . .	87
2 Sous-modules . . . . .	90
3 Modules quotients . . . . .	91
4 Morphismes et quotients . . . . .	92
5 Modules monogènes . . . . .	94
6 Produit et somme . . . . .	95
7 Modules libres . . . . .	96
<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>101</b>
TR.IV.A. Propriétés universelles de somme directe et produit direct . . . . .	101
TR.IV.B. Algèbres – Algèbres de polynômes . . . . .	102
<b>V Modules sur un anneau principal</b>	<b>105</b>
1 Modules libres – Modules de type fini . . . . .	105
2 Modules de torsion . . . . .	107
3 Structure des modules de type fini sur un anneau principal . . . . .	109
4 Autre démonstration du théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal . . . . .	118
<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>125</b>
TR.V.A. Réduction des endomorphismes à la forme de Jordan . . . . .	125
TR.V.B. Calcul des facteurs invariants . . . . .	127

<b>VI</b>	<b>Éléments entiers et anneaux de Dedekind</b>	<b>129</b>
1	Éléments entiers . . . . .	130
2	Norme et trace . . . . .	134
3	Application aux corps cyclotomiques . . . . .	138
4	Anneaux et modules noethériens . . . . .	140
5	Idéaux fractionnaires . . . . .	143
6	Anneaux de Dedekind . . . . .	144
7	Norme d'un idéal . . . . .	148
8	Décomposition des idéaux premiers dans une extension et action du groupe de Galois . . . . .	150
9	Ramification . . . . .	153
	<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>161</b>
	TR.VI.A. Quelques propriétés des anneaux de Dedekind . . . . .	161
	TR.VI.B. Ramification des nombres premiers dans un corps cyclotomique . . . . .	162
	TR.VI.C. Décomposition des nombres premiers dans un corps quadratique . . . . .	163
	TR.VI.D. Théorème des deux carrés . . . . .	165
<b>VII</b>	<b>Dualité</b>	<b>167</b>
1	Modules d'applications linéaires et suites exactes . . . . .	167
2	Dualité . . . . .	171
3	Orthogonalité . . . . .	175
	<b>Thèmes de réflexion</b>	<b>177</b>
	TR.VII.A. Modules injectifs – Modules projectifs . . . . .	177
	TR.VII.B. Enveloppe injective . . . . .	180
	TR.VII.C. Une autre dualité . . . . .	182
<b>Partie II</b>	<b>Algèbre multilinéaire</b>	<b>185</b>
<b>VIII</b>	<b>Produit tensoriel – Algèbre tensorielle – Algèbre symétrique</b>	<b>187</b>
1	Applications bilinéaires . . . . .	187
2	Produit tensoriel . . . . .	189
3	Commutation du produit tensoriel aux sommes directes . . . . .	193
4	Associativité du produit tensoriel . . . . .	196
5	Changement d'anneau de base . . . . .	198
6	Produit tensoriel d'algèbres associatives . . . . .	199

7	Produit tensoriel et dualité . . . . .	200
8	Algèbre tensorielle . . . . .	203
9	Algèbre symétrique . . . . .	206
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>209</b>
	TR.VIII.A. Modules plats, fidèlement plats . . . . .	209
	TR.VIII.B. Passage du local au global . . . . .	211
	TR.VIII.C. Propriété universelle du produit tensoriel d'algèbres commutatives . . . . .	211
<b>IX</b>	<b>Produit extérieur – Algèbre extérieure</b>	<b>213</b>
1	Applications multilinéaires alternées . . . . .	213
2	Déterminants . . . . .	215
3	Produit extérieur . . . . .	217
4	Commutation du produit extérieur aux sommes directes . . . . .	221
5	Algèbre extérieure . . . . .	223
<b>Thèmes de réflexion</b>		<b>225</b>
	TR.IX.A. Annulation de puissances extérieures . . . . .	225
	TR.IX.B. Dérivations et formes différentielles . . . . .	225
<b>Appendice</b>		<b>229</b>
1	Ensembles ordonnés . . . . .	229
2	Cardinaux – Ensembles infinis . . . . .	232
<b>Bibliographie</b>		<b>239</b>
<b>Index terminologique</b>		<b>241</b>