

Table des matières

1	Notions de base en mathématiques	3
1.1	Eléments de logique mathématique	3
1.1.1	Négation	4
1.1.2	Et, ou	4
1.1.3	Equivalence	5
1.1.4	Implication	5
1.1.5	Le raisonnement par l'absurde	8
1.2	Les ensembles	8
1.2.1	Notion d'ensemble	8
1.2.2	Opérations sur les ensembles	10
1.2.3	Produit cartésien	11
1.2.4	Quantificateurs	12
1.3	Relations	13
1.3.1	Relations d'équivalence	15
1.3.2	Relations d'ordre	16
1.4	Fonctions, applications	17
1.4.1	Fonctions	17
1.4.2	Applications	19
1.4.3	Injections, surjections, bijections	20
1.4.4	Application réciproque d'une bijection	21
1.5	Lois de composition interne et externe	23
1.5.1	Notion de loi de composition interne	23
1.5.2	Propriétés d'une loi de composition interne	24
1.5.3	Structure de groupe	26
1.5.4	Structure d'anneau	27
1.5.5	Structure de corps	29
1.5.6	Notion de loi de composition externe	30
1.5.7	Structure d'espace vectoriel	30
1.6	Exercices	31
2	Géométrie plane	35
2.1	Le plan affine P	35
2.1.1	Premier axiome	35
2.1.2	Deuxième axiome	36
2.1.3	Troisième axiome	37
2.1.4	Quatrième axiome	38

2.1.5	Cinquième axiome	41
2.1.6	Milieu d'un bipoint	42
2.1.7	Symétrie centrale	44
2.1.8	Symétrie axiale	45
2.1.9	Sixième axiome	45
2.1.10	Le théorème de Thalès	48
2.1.11	Relation d'équipollence	52
2.1.12	Définition d'un vecteur	54
2.1.13	Somme de deux vecteurs	55
2.1.14	Multiplication d'un vecteur par un réel	56
2.1.15	Structure de \mathcal{V} et structure d'espace affine de P	59
2.1.16	Caractérisations vectorielles du milieu d'un bipoint	60
2.1.17	Vecteurs colinéaires	60
2.2	Géométrie analytique dans le plan affine	62
2.2.1	Repère cartésien de P , base de \mathcal{V}	63
2.2.2	Propriétés des coordonnées	64
2.2.3	Représentations paramétriques d'une droite	66
2.2.4	Equations cartésiennes d'une droite	66
2.2.5	Equation réduite d'une droite	67
2.2.6	Caractérisation des demi-plans	69
2.3	Exercices	72
3	Produit scalaire usuel du plan	73
3.1	Structure euclidienne de P	73
3.1.1	Septième axiome	73
3.1.2	Rapport de projection orthogonale	74
3.1.3	Huitième axiome	75
3.1.4	Norme d'un vecteur	75
3.1.5	Produit scalaire usuel de P	76
3.1.6	Vecteurs orthogonaux	77
3.1.7	Propriétés du produit scalaire	78
3.1.8	Structure euclidienne de \mathcal{V} et de P	79
3.1.9	Carré scalaire	81
3.1.10	Inégalité de Cauchy-Schwarz	82
3.1.11	Notion d'espace vectoriel normé	83
3.2	Bases orthonormées de \mathcal{V} , repères orthonormés de P	85
3.2.1	Définitions	85
3.2.2	Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée	85
3.2.3	Cercle	86
3.2.4	Equations cartésiennes d'un cercle	87
3.2.5	Vecteur normal à une droite	88
3.2.6	Application à la détermination d'une équation de droite, le plan étant rapporté à un repère orthonormé	89
3.2.7	Application à la caractérisation de droites parallèles, perpendiculaires	90

3.2.8	Distance d'un point à une droite	90
3.3	Angles orientés de demi-droites	92
3.3.1	Propriétés admises	92
3.3.2	Arcs orientés sur un cercle de rayon 1	93
3.3.3	Angles de demi-droites	94
3.3.4	Somme des angles orientés de demi-droites	96
3.4	Angles orientés de vecteurs non nuls	97
3.4.1	Angles de vecteurs non nuls	97
3.4.2	Somme de deux angles orientés de vecteurs	98
3.4.3	Orientation du plan	99
3.4.4	Mesures d'un angle orienté de vecteurs non nuls	99
3.5	Angles orientés de droites	102
3.6	Fonctions trigonométriques	104
3.6.1	Cercle trigonométrique	104
3.6.2	Sinus et cosinus d'un réel	105
3.7	Exercices	107

Géométrie de l'espace **109**

4.1	Droites et plans de l'espace	109
4.1.1	Droites de l'espace	109
4.1.2	Plans de l'espace	109
4.1.3	Positions relatives de deux droites de l'espace	111
4.1.4	Positions relatives d'une droite et d'un plan	112
4.1.5	Positions relatives de deux plans	113
4.2	Droites et plans parallèles	115
4.3	Projections dans l'espace	120
4.3.1	Définition et propriétés	120
4.3.2	Perspective cavalière	122
4.4	Symétries de l'espace	123
4.5	Théorèmes de Thalès dans l'espace	123
4.6	Vecteurs de l'espace	125
4.7	Repères cartésiens de E	128
4.7.1	Vecteurs non coplanaires	128
4.7.2	Repère cartésien de E	130
4.8	Caractérisations des plans de E	130
4.8.1	Caractérisations vectorielles	130
4.8.2	Représentations paramétriques	131
4.8.3	Equations cartésiennes d'un plan	132
4.9	Caractérisations des droites de E	133
4.9.1	Caractérisations vectorielles	133
4.9.2	Représentations paramétriques	134
4.10	Exercices	135

5	Les nombres complexes	137
5.1	Le corps \mathbf{C} des nombres complexes	137
5.1.1	Définitions	137
5.1.2	Forme algébrique d'un nombre complexe	138
5.1.3	Calculs dans \mathbf{C}	139
5.1.4	Conjugué d'un nombre complexe	140
5.1.5	Module d'un nombre complexe	141
5.2	Interprétation géométrique des nombres complexes	141
5.2.1	Nombres complexes et points du plan	141
5.2.2	Nombres complexes et vecteurs du plan	142
5.2.3	Inégalité triangulaire	143
5.3	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	143
5.3.1	Arguments et forme trigonométrique	143
5.3.2	Interprétation géométrique des arguments	145
5.3.3	Arguments d'un produit	146
5.3.4	Notation exponentielle des nombres complexes	148
5.4	Racines $n - ièmes$ d'un nombre complexe	148
5.4.1	Racines $n - ièmes$ de l'unité	149
5.4.2	Points images des racines $n - ièmes$ de l'unité	150
5.4.3	Somme des racines $n - ièmes$ de l'unité	151
5.4.4	Racines $n - ièmes$ d'un nombre complexe non nul	151
5.4.5	Racines carrées d'un nombre complexe non nul	152
5.4.6	Application : équations du second degré	152
5.5	Exercices	154
6	Polynômes et fractions rationnelles	157
6.1	Polynômes formels	157
6.1.1	Définitions	157
6.1.2	Opérations dans $K[X]$	158
6.1.3	Effets sur les degrés	160
6.2	Divisions dans $K[X]$	161
6.2.1	Multiples et diviseurs	161
6.2.2	Division euclidienne	161
6.2.3	Division suivant les puissances croissantes de X	163
6.3	Racines d'un polynôme	165
6.3.1	Fonction polynôme	165
6.3.2	Racines d'un polynôme	165
6.3.3	Polynômes et fonctions polynômes	168
6.3.4	Ordre de multiplicité d'une racine	169
6.4	Relations entre racines et coefficients	169
6.5	Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$	171
6.5.1	Théorème de d'Alembert	171
6.5.2	Polynôme irréductible	172
6.5.3	Polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$	172
6.5.4	Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$	172
6.6	Equations du troisième degré à coefficients réels	174

6.6.1	Transformation du problème	175
6.6.2	Réduction du système (S_1)	176
6.6.3	Résolution du système (S_2)	176
6.6.4	Résolution de l'équation 6.4	177
6.6.5	Résolution dans \mathbf{R}	178
6.7	Fractions rationnelles, fonctions rationnelles	179
6.7.1	Fraction rationnelle	179
6.7.2	Racine (ou zéro) et pôle d'une fraction rationnelle	181
6.7.3	Fonction rationnelle	181
6.7.4	Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples	182
6.8	Exercices	187
7	Les coniques	189
7.1	Généralités	189
7.1.1	Définition monofocale	189
7.1.2	Axe focal	190
7.1.3	Sommets d'une conique	190
7.1.4	Paramètre d'une conique	191
7.1.5	Intérieur, extérieur d'une conique	192
7.2	Coniques d'excentricité $e = 1$	192
7.2.1	Parabole	192
7.2.2	Tracé point par point	193
7.2.3	Equation réduite	194
7.2.4	Tracé d'une parabole	195
7.2.5	Représentation paramétrique, tangentes	196
7.3	Coniques d'excentricité $e < 1$	197
7.3.1	Equation réduite d'une ellipse	197
7.3.2	Réciproquement	200
7.3.3	Symétries, grand axe, petit axe d'une ellipse	201
7.3.4	Tracé de l'ellipse	202
7.3.5	Représentation paramétrique	202
7.3.6	Tangentes à une ellipse	204
7.4	Coniques d'excentricité $e > 1$	205
7.4.1	Equation réduite d'une hyperbole	205
7.4.2	Réciproquement	207
7.4.3	Symétries d'une hyperbole	208
7.4.4	Tracé d'une hyperbole	208
7.4.5	Représentation paramétrique d'une hyperbole	210
7.4.6	Tangentes à une hyperbole	210
7.4.7	Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes	211
7.5	Exercices	214
8	Algèbre Linéaire	217
8.1	Espaces vectoriels sur K	217
8.1.1	Définition de la structure	217
8.1.2	Exemples	218

8.1.3	Sous-espace vectoriel	220
8.1.4	Exemples	221
8.1.5	Intersection de sous-espaces vectoriels	221
8.2	Sous-espace engendré, famille génératrice	222
8.2.1	Sous-espace engendré par une partie de E	222
8.2.2	Famille de vecteurs	222
8.2.3	Combinaison linéaire	223
8.2.4	Famille génératrice	225
8.2.5	Espaces vectoriels de dimension finie	226
8.3	Famille libre, famille liée	227
8.3.1	Un problème d'unicité	227
8.3.2	Famille libre, famille liée.	227
8.4	Bases, dimension en dimension finie	231
8.4.1	Base	231
8.4.2	Existence de bases pour un espace E non nul et de dimension finie	234
8.5	Dimension d'un espace de dimension finie	235
8.5.1	Notion de dimension	235
8.5.2	Dimension des sous-espaces d'un espace de dimension finie	237
8.5.3	Rang d'une famille de vecteurs	238
8.6	Sous-espaces vectoriels supplémentaires	238
8.6.1	Somme de deux sous-espaces	238
8.6.2	Somme directe de sous-espaces	239
8.6.3	Sous-espaces supplémentaires	240
8.7	Applications linéaires	241
8.7.1	Définitions. Premières propriétés	241
8.7.2	Exemples, contre-exemples	242
8.8	Opérations entre applications linéaires	244
8.8.1	L'ensemble $L(E, F)$	244
8.8.2	Composition d'applications linéaires	244
8.9	Image, noyau	245
8.9.1	Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire	245
8.9.2	Image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F	246
8.9.3	Surjectivité, injectivité d'une application linéaire	247
8.9.4	Réciproque d'un isomorphisme. Groupe linéaire de E	248
8.10	Cas d'un espace de dimension finie	249
8.10.1	Propriété fondamentale	249
8.10.2	Isomorphisme de $\text{Im } f$ avec tout supplémentaire de $\ker f$	252
8.10.3	Formes linéaires sur E	253
8.11	Matrice d'un morphisme en dimensions fines	254
8.11.1	Matrice d'une application linéaire	254
8.11.2	Matrice de $f + g$, de λf	256
8.11.3	Matrice de $g \circ f$	257
8.12	Ensemble des matrices (n, p)	258
8.12.1	Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$	258
8.12.2	Isomorphisme entre $L(E, F)$ et $\mathcal{M}_{np}(K)$	259

8.12.3	Matrice transposée	259
8.13	Ensemble des matrices carrées d'ordre n	260
8.13.1	Structure	260
8.13.2	Eléments inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$	261
8.13.3	Etude du cas $n = 2$	261
8.14	Exercices	262
9	Systèmes linéaires	265
9.1	Généralités	265
9.1.1	Terminologie	265
9.1.2	Systèmes équivalents	266
9.2	Différentes interprétations d'un système	266
9.2.1	Une combinaison linéaire de vecteurs	266
9.2.2	Une application linéaire	268
9.2.3	Equation matricielle	269
9.2.4	Bilan	269
9.3	Méthode du pivot de Gauss	270
9.3.1	Transformations élémentaires	270
9.3.2	Algorithme	271
9.4	Systèmes de deux équations à deux inconnues	275
9.5	Exercices	278
10	Barycentres	279
10.1	Fonction vectorielle de Leibniz	279
10.2	Barycentre	280
10.2.1	Définition	280
10.2.2	Propriété fondamentale du barycentre	281
10.2.3	Propriétés du barycentre	283
10.2.4	Les barycentres de deux points	285
10.2.5	Les barycentres de trois points	286
10.2.6	Isobarycentre	287
10.3	Fonction scalaire de Leibniz	288
10.3.1	Fonction scalaire de Leibniz	288
10.3.2	Cas d'un système de masse totale non nulle	289
10.3.3	Cas d'un système de masse totale nulle	289
10.3.4	Deux cas particuliers	290
10.4	Lignes de niveau dans le plan P	291
10.4.1	Notion de ligne de niveau d'une fonction	291
10.4.2	Lignes de niveau d'une première fonction f	291
10.4.3	Lignes de niveau de la fonction ψ	292
10.5	Exercices	295
11	Applications affines	297
11.1	Projections du plan P	297
11.1.1	Image et invariants d'une projection plane	297
11.1.2	Conservation des barycentres	298

11.2	Translations du plan ou de l'espace	299
11.2.1	Points invariants	299
11.2.2	Composition de translations	300
11.2.3	Caractérisation vectorielle d'une translation	300
11.3	Homothéties	304
11.3.1	Ensemble des points invariants	304
11.3.2	Composition d'homothéties de même centre	304
11.3.3	Caractérisation vectorielle d'une homothétie	305
11.3.4	Ensemble des homothéties-translations	309
11.4	Applications affines	310
11.4.1	Définition, premières propriétés	310
11.4.2	Image d'une droite	311
11.4.3	Image d'un segment, d'une demi-droite	312
11.4.4	Image d'un plan	313
11.4.5	Applications affines du plan P , de l'espace E	313
11.4.6	Application vectorielle associée	314
11.4.7	Caractérisation analytique d'une application affine du plan, de l'espace	315
11.5	Affinités orthogonales du plan	318
11.5.1	Points invariants	318
11.5.2	Composée de deux affinités de même axe	318
11.5.3	Bijektivité	319
11.5.4	Expression analytique dans un repère lié à l'axe	319
11.5.5	Image d'un cercle centré sur l'axe	320
11.6	Exercices	321
12	Isométries - Etude des isométries planes	323
12.1	Notion d'isométrie de \mathcal{E}	323
12.1.1	Composée de deux isométries de \mathcal{E}	323
12.1.2	Injectivité	324
12.2	Invariants par une isométrie	324
12.2.1	Conservation du milieu	324
12.2.2	Conservation du produit scalaire	325
12.2.3	Conservation des barycentres	325
12.3	Effet sur un repère orthonormé. Bijektivité	326
12.3.1	Effet sur un repère orthonormé de \mathcal{E}	326
12.3.2	Bijektivité. Réciproque d'une isométrie	327
12.3.3	Groupe des isométries de \mathcal{E}	328
12.4	Isométries planes	328
12.4.1	Réflexion plane	328
12.4.2	Effet d'une réflexion sur les angles orientés	330
12.5	Décomposition en produit de réflexions	332
12.5.1	Isométrie plane admettant trois points invariants non alignés	332
12.5.2	Isométrie, distincte de Id_P , admettant deux points distincts invariants	332
12.5.3	Isométrie admettant un unique point fixe	333

12.5.4	Décomposition des isométries avec des réflexions	333
12.6	Nature des déplacements de P	334
12.6.1	Composée de deux réflexions d'axes parallèles	334
12.6.2	Composée de deux réflexions d'axes sécants	335
12.6.3	Décomposition d'une rotation	336
12.6.4	Ensemble des déplacements du plan	336
12.6.5	Nature de la composée de deux déplacements	337
12.6.6	Déplacement caractérisé par la donnée d'un point et son image	338
12.6.7	Expression complexe des déplacements du plan	338
12.7	Exercices	340
12.8	Problème : une étude du cercle	341
13	Similitudes planes directes	343
13.1	Composée d'une homothétie et d'une rotation	344
13.1.1	Effet sur les distances, les angles	344
13.1.2	Effet sur les barycentres	344
13.1.3	Réduction au cas $\lambda > 0$	345
13.1.4	Cas particulier où r et h ont même centre Ω	345
13.2	Similitude plane directe	346
13.2.1	Définition	346
13.2.2	Composée de deux similitudes planes directes	347
13.2.3	Décomposition d'une similitude plane directe	347
13.2.4	Groupe des similitudes directes	348
13.2.5	Angle d'une similitude plane directe	348
13.2.6	Figures directement semblables	351
13.2.7	Similitudes indirectes	351
13.3	Similitude directe et application complexe	352
13.3.1	Expression complexe d'une similitude directe	352
13.3.2	Application ponctuelle associée à $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$	353
13.3.3	Similitude directe définie par la donnée d'un bipoint et son image	354
13.3.4	Points invariants d'une similitude directe	354
13.3.5	Forme réduite d'une similitude plane directe	355
13.4	Exercices	356
14	Produit scalaire de l'espace	359
14.1	Droites orthogonales	359
14.2	Droites et plans orthogonaux	360
14.2.1	Définition et premières propriétés	360
14.2.2	Plans orthogonaux à une même droite	361
14.2.3	Droites orthogonales à un même plan	362
14.2.4	Caractérisation	362
14.2.5	Plan orthogonal à une droite donnée et passant par un point donné	364
14.2.6	Droite orthogonale à un plan donné et passant par un point donné	364

14.2.7	Vecteur normal à un plan	365
14.3	Projections orthogonales	366
14.4	Produit scalaire usuel de l'espace	367
14.4.1	Définition et premières propriétés	367
14.4.2	Propriété d'additivité	368
14.4.3	Carré scalaire, norme	369
14.4.4	Vecteurs orthogonaux	370
14.4.5	Plans perpendiculaires	372
14.5	Repères orthonormés de E	373
14.5.1	Base orthonormée de \mathcal{W} , repère orthonormé de E	373
14.5.2	Expression du produit scalaire et de la norme relativement à une base orthonormée de \mathcal{W}	373
14.5.3	Equation cartésienne d'une sphère	374
14.5.4	Equation cartésienne d'un plan	374
14.5.5	Parallélisme, perpendicularité de deux plans	375
14.5.6	Distance d'un point à un plan de E	376
14.6	Produit vectoriel dans l'espace orienté	376
14.6.1	Orientation physique de l'espace	376
14.6.2	Orientation d'un plan par un vecteur normal	378
14.6.3	Produit vectoriel	378
14.6.4	Autre expression du produit vectoriel	378
14.6.5	Coordonnées dans une base orthonormée directe	380
14.6.6	Applications	380
14.7	Exercices	381
15	Exemples d'isométries de l'espace	383
15.1	Isométries de l'espace	383
15.1.1	Généralités	383
15.1.2	Caractérisation de Id_E	384
15.2	Réflexions de l'espace	384
15.2.1	Définition	384
15.2.2	Caractérisation des réflexions de E	386
15.2.3	Expression analytique dans un repère orthonormé lié au plan de réflexion	386
15.2.4	Effet d'une réflexion sur l'orientation	387
15.2.5	Droites et plans globalement invariants par une réflexion	388
15.3	Composée de deux réflexions de l'espace	389
15.3.1	Composée de deux réflexions de plans parallèles	389
15.3.2	Composée de deux réflexions de plans sécants	390
15.4	Rotation de l'espace	391
15.4.1	Définition	391
15.4.2	Décomposition d'une rotation	392
15.4.3	Points invariants par une rotation de l'espace	393
15.4.4	Isométries de l'espace dont l'ensemble des points invariants est une droite	393
15.5	Déplacements de l'espace	394

15.5.1	Définition	394
15.5.2	Composée d'une translation et d'une rotation	395
15.5.3	Vissage	396
15.5.4	Composées de rotations et de translations	396
15.6	Exercices	399
16	Eléments de correction des exercices	401
16.1	Notions de base	401
16.2	Géométrie plane	404
16.3	Produit scalaire du plan	409
16.4	Géométrie de l'espace	411
16.5	Nombres complexes	415
16.6	Polynômes et fractions rationnelles	420
16.7	Coniques	424
16.8	Algèbre linéaire	430
16.9	Systèmes linéaires	437
16.10	Barycentres	439
16.11	Applications affines	443
16.12	Isométries	445
16.13	Similitudes planes	450
16.14	Produit scalaire de l'espace	454
16.15	Isométries de l'espace	457