

# Table des matières

## Introduction

## Préliminaires

	1
1. Déterminant, rang, système linéaire	9
1.0. Espace vectoriel, dimension, application linéaire, matrice, dualité	9
1.0.0. Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, application linéaire	10
1.0.1. Famille, partie libre, génératrice, base	14
1.0.2. Base, dimension	15
1.0.3. Dimension d'un sous-espace vectoriel	17
1.0.4. Rang d'une application linéaire	19
1.0.5. Dualité dans les espaces vectoriels	24
1.1. Déterminant	29
1.1.1. Déterminants de $n$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $n$ relativement à une base	30
1.1.2. Déterminant d'un endomorphisme	32
1.1.3. Déterminant d'une matrice carrée	33
1.1.4. Calcul d'un déterminant	37
1.2. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, rang, matrices équivalentes	41
1.2.1. Le rang d'une matrice	42
1.2.2. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes	45
1.2.3. Matrices échelonnées, matrices équivalentes	47
1.2.4. Les invariants de similitude d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou $K[X]$	56
1.2.5. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$ , les groupes abéliens finis, les groupes abéliens de type fini	61
1.2.6. Le groupe $GL_n(A), SL_n(A)$ où $A = \mathbb{Z}$ ou $K[X]$	65
1.3. Résolution de systèmes linéaires à coefficients dans un corps	67
1.3.1. L'aspect théorique, le théorème de Rouché Fontené	68
1.3.2. Résolution d'un système linéaire par la méthode du système échelonné	73
1.3.3. Recherche d'un système minimal d'équations (resp. d'une base) d'un sous-espace vectoriel de $K^P$	74
1.4. Exercices	77

2.	L'algèbre des endomorphismes, le groupe linéaire	105
2.1.	L'algèbre des endomorphismes	105
2.1.1.	L'algèbre des endomorphismes, dimension, centre	105
2.1.2.	Idéaux bilatères, à gauche, à droite	106
2.1.3.	Le dual de $\text{End } E$	110
2.1.4.	Quelques exemples de sous-algèbres	110
2.1.5.	Propriétés topologiques, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	111
2.2.	Le groupe linéaire	112
2.2.1.	Le groupe des inversibles de $\text{End } E$	112
2.2.2.	Des générateurs de $GL_n(K)$	113
2.2.3.	Transvections	113
2.2.4.	Sous-groupes distingués de $GL_n(K)$	118
2.2.5.	La topologie du groupe linéaire	119
2.3.	Exercices	122
3.	Polynôme minimal, caractéristique	141
3.1.	Le polynôme minimal d'un endomorphisme	141
3.2.	Le polynôme caractéristique	147
3.3.	Le théorème de Cayley-Hamilton	151
3.4.	Calcul pratique du polynôme minimal, caractéristique, d'un sous-espace monogène	153
3.4.1.	Le calcul du polynôme minimal d'une matrice	153
3.4.2.	Le calcul du polynôme caractéristique	154
3.4.3.	Calcul d'un sous-espace monogène maximal (i.e. le lemme 3.1.8)	155
3.5.	Exercices	157

4.	Réduction d'un endomorphisme, invariants de similitude	175
4.1.	Le théorème principal	175
4.2.	Le point de vue matriciel	177
4.2.1.	Les invariants de similitude d'une matrice	177
4.2.2.	Les orbites de $GL_n(K)$ opérant par conjugaison sur $M_n(K)$	178
4.3.	Les invariants de similitude de $XI_n - A$	179
4.4.	Le calcul des invariants de similitude d'une matrice $A$	180
4.4.1.	Le calcul des invariants de similitude de la matrice $A$	180
4.4.2.	Construction d'une base dans laquelle l'endomorphisme $\hat{A}$ est un tableau diagonal de matrices compagnons	180
4.5.	Quelques conséquences du théorème principal	181
4.6.	La réduction de Jordan	182
4.7.	Exercices	185
5.	Vecteurs propres, diagonalisation et réductions	209
5.1.	Vecteurs propres, valeurs propres d'un endomorphisme	210
5.2.	Diagonalisation des endomorphismes, des matrices	212
5.3.	Réduction à la forme triangulaire d'une matrice, d'un endomorphisme	215
5.4.	Réduction à la forme diagonalisable plus nilpotent	216
5.5.	Calcul de vecteurs propres, valeurs propres	218
5.6.	Les endomorphismes semi-simples	221
5.7.	Exercices	227

Bibliographie	285
---------------	-----

Index des notations	287
---------------------	-----

Index des noms	288
----------------	-----