COURS ET TRAVAUX DIRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Algèbre et géométrie

COURS DÉTAILLÉ AVEC DÉMONSTRATIONS COMMENTÉES, ASTUCES, MISES EN GARDE

L'ESSENTIEL SOUS FORME DE SYNTHÈSES, MÉTHODES ET TD

LES EXERCICES AVEC LEURS CORRIGÉS COMPLETS ET EXPLIQUÉS

L1

Nicolas Nguyen

ellipses

CHAPITRE 1

Introduction

Lorsqu'on souhaite établir rigoureusement des théorèmes, il faut bien commencer par fixer le vocabulaire et les règles de démonstrations ! C'est précisément, ce que nous allons faire dans ce premier chapitre. Ces *notions de base* seront utiles tout au long du livre et devront être acquises progressivement au cours de la première année. Vous serez certainement amenés à vous y référer régulièrement.

Le chapitre est organisé suivant trois axes complémentaires : ensembles, logique et applications. Nous rappelons les opérations élémentaires sur les ensembles, ainsi que les notions d'applications, de suites et d'équations. Les applications et les suites forment le socle sur lequel reposera toute l'*Analyse* de Licence -étude des fonctions d'une ou plusieurs variables, suites et séries numériques, *etc*. Enfin, la notion d'équation est essentielle en mathématique, non seulement en *Algèbre linéaire* - systèmes d'équations linéaires- mais aussi en *Algèbre*- nombres complexes, polynômes- ou encore en *Analyse* -équations différentielles. En ce qui concerne la logique, il s'agit d'une part d'introduire les quantificateurs existentiel et universel et d'autre part de présenter les stratégies de démonstration.

Objectifs

Pour les applications, vous devrez avoir acquis les notions :

- ▷ D'injectivité, surjectivité et bijectivité ;
- ▷ D'images directes et réciproques d'une partie.

Pour la logique, vous devrez savoir :

- ▷ Choisir une stratégie de démonstration ;
- ▷ Rédiger une démonstration.

Pour la théorie des ensembles, les objectifs sont plus modestes, il s'agit avant tout de savoir calculer avec les opérateurs ensemblistes : $\cup, \cap, \complement_E$.

LOGIQUE, ENSEMBLES, APPLICATIONS

Plan du cours détaillé

COURS DÉTAILLÉ

Section I. Notions sur les ensembles

1 Appartenance et inclusion

a. Relation d'appartenance

Vous connaissez déjà tout (ou presque) du contenu de ce paragraphe. Il ne s'agit que de fixer les notations que nous utiliserons dans tout le cours.

Définition : *On appelle* ***ensemble*** *une collection d'objets. Ces objets s'appellent les* ***éléments*** *de l'ensemble.*

Notation : *Si E est un ensemble et si x est élément de E, on note $x \in E$. On dit aussi que x* ***appartient*** *à E. Lorsque x n'est pas élément de E, on note $x \notin E$.*

Un ensemble est caractérisé par la donnée de ses éléments. La manière **la plus simple** de définir un ensemble consiste à dresser la liste de ces éléments :

- le **singleton** $\{a\}$;
- la **paire** $\{a; b\}$;
- $\{10, 15, 2\}$.

Cependant, il **n'est pas toujours possible** de dresser la liste de tous les éléments :

- soit parce qu'il y a trop d'éléments : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des ensembles de nombres qui possèdent une infinité d'éléments ;
- soit parce qu'il n'y en a pas ! C'est le cas pour l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui a la particularité de ne posséder aucun élément.

b. Inclusion, égalité

Définition : *Soit E, F deux ensembles.*

- *On dit que E* ***est inclus dans*** *F si tout élément de E est élément de F. On note $E \subset F$.*
- *On dit que E et F sont* ***égaux*** *si $E \subset F$ et $F \subset E$. On note $E = F$.*

En clair, deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

En pratique : pour démontrer que deux ensembles sont égaux, vous pouvez procéder par *double-inclusion.*

Exemples : $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 15\}$, $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\}$.

On ne change pas l'ensemble en modifiant l'ordre de ses éléments ou en les répétant.

Vocabulaire : *lorsque $E \subset F$, on dit que E est un* ***sous-ensemble*** *de F, ou bien que E est une* ***partie*** *de F.*

c. Parties d'un ensemble

Définition : *Soit E un ensemble. L'ensemble dont les éléments sont les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.*

Que vaut $\mathscr{P}(E)$ lorsque $E = \emptyset$? Lorsque $E = \{1, 2, 3\}$?

Remarque : Soit E un ensemble, alors $\emptyset \subset E$, $E \subset E$.
Soit E et F deux ensembles, alors $E \subset F$ se traduit par $E \in \mathscr{P}(F)$.
Soit a un objet et E un ensemble, alors $a \in E$ se traduit par $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$ ou bien encore $\{a\} \subset E$.

La distinction entre ces deux notions d'ensemble défini en extension et en compréhension est essentielle.

En pratique : Il existe deux façons de définir une partie d'un ensemble E :

- **en extension**, cela consiste à citer ses éléments, par exemple $5.\mathbb{N}$ est l'ensemble des $5.k$, lorsque k décrit $\mathbb{N}$:
$$5.\mathbb{N} = \{5.k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$$
- **en compréhension**, cela consiste à sélectionner les éléments de E qui vérifient une propriété, ainsi $5.\mathbb{N}$ est aussi l'ensemble des entiers n tels que 5 divise n :
$$5.\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} |\ 5 \text{ divise } n\}$$

2 Opérations élémentaires dans $\mathscr{P}(E)$

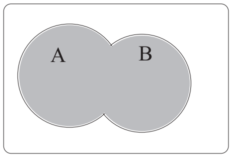
a. Union, intersection, différence et complémentaire

Ainsi, à partir de deux parties A et B, on peut en définir de nouvelles par union, intersection, etc. Ces procédés sont donc des opérations dans l'ensemble des parties de E et nous allons étudier les règles de calcul pour ces opérations.

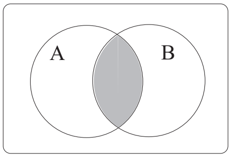
Définition : *Soit E un ensemble, $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on définit*

- **la réunion** *de A et B par $A \cup B = \{x \in E |\ x \in A$ ou $x \in B\}$;*
- **l'intersection** *de A et B par $A \cap B = \{x \in E |\ x \in A$ et $x \in B\}$;*
- **le complémentaire** *de A dans E par $\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$;*
- **la différence de** *A et B par $A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A$ et $x \notin B\} = A \cap \complement_E B$.*

Illustration :



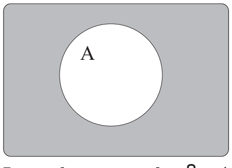
Les éléments de $A \cup B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B.



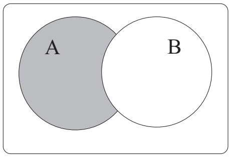
Les éléments de $A \cap B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **et** à B.

Calculez $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\complement_{\mathbb{R}} A$, lorsque A et B sont les intervalles réels définis par : $A =]0, 2]$, $B = [1, 3]$.

Deux parties A et B de E sont dites **disjointes** lorsque $A \cap B = \emptyset$.



Les éléments de $\complement_E A$ sont les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



Les éléments de $A \setminus B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **mais pas** à B.

Remarques :

1. Pour toutes parties A et B de E, $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$.
2. Dire que $x \in \complement_E A$ signifie précisément $x \in E$ et $x \notin A$! !

b. Règles de calcul pour la réunion, intersection

Les règles de calcul pour les opérations élémentaires entre parties sont simples à retenir :

On résume ces propriétés en disant que la réunion et l'intersection sont commutatives, associatives et distributives l'une sur l'autre.

Proposition 1.1. Soit $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ un triplet de parties d'un ensemble E.

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

□ **Démonstration**

Les propriétés de commutativité et d'associativité découlent directement des définitions. Montrons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nous allons établir que ces deux parties ont les mêmes éléments.

Soit $x \in E$ arbitraire fixé.

- si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
- si $x \notin A$, alors $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in B \cap C \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dans tous les cas, nous avons démontré que x est élément de $A \cup (B \cap C)$ si et seulement si x est élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ces deux ensembles ont donc mêmes éléments, ils sont égaux. □

c. Règles de calcul pour les complémentaires

Intéressons-nous à présent aux propriétés du complémentaire. Par définition, pour toute partie $A \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap \complement_E A = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \complement_E A = E.$$

Autrement dit, le complémentaire de A est la plus petite partie de E qu'il faut rajouter à A pour recouvrir E.

Ces deux propriétés caractérisent le complémentaire :

Proposition 1.2. Caractérisation du complémentaire –. Soit A et B des parties d'un ensemble E,

$$B = \complement_E A \textit{ si et seulement si } A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset$$

Lorsqu'une propriété P *est vraie si* Q *est vraie*, on dit que Q est une condition suffisante (CS) pour avoir P. Lorsqu'une propriété P *est vraie seulement si* Q *est vraie*, on dit que Q est une condition nécessaire (CN) pour avoir P. La proposition donne une condition nécessaire et suffisante pour que B soit le complémentaire de A.

□ **Démonstration**

CN Supposons que $B = \complement_E A$. En ce cas, par définition, $A \cap B = \emptyset$ car un élément de E ne saurait appartenir à A et à son complémentaire et $A \cup B = E$ car tout élément de E appartient à A ou à son complémentaire.

CS Supposons que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. *Montrons*, par *double-inclusion* que $B = \complement_E A$.
Soit $x \in \complement_E A$. Par définition, cela signifie que $x \in E$ et $x \notin A$. Puisque par hypothèse $E = A \cup B$, x appartient à A ou à B. Comme x n'appartient pas à A, il est nécessairement élément de B. Ceci prouve que $\complement_E A \subset B$.
D'autre part, soit $x \in B$. Comme par hypothèse $A \cap B = \emptyset$, je suis sûr que x n'appartient pas à A. Mais c'est dire précisément que $x \in \complement_E A$. Ainsi $B \subset \complement_E A$.
Conclusion : si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $B = \complement_E A$. □

Cette caractérisation permet d'obtenir facilement les propriétés suivantes :

Corollaire 1.3. Soit A, B deux parties d'un ensemble E, alors

- $B = \complement_E A$ *si et seulement si* $A = \complement_E B$.
- $\complement_E \complement_E A = A$

L'opération « passage au complémentaire » se comporte bien vis-à-vis des deux autres opérations :

Ces propriétés sont aussi appelées **Lois de Morgan**.

Proposition 1.4. Propriétés du passage au complémentaire —.
Soit A, B deux parties d'un ensemble E, alors :
- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Retenez que :
- Le *complémentaire* d'une **réunion** est l' **intersection** des *complémentaires* ;
- Le *complémentaire* d'une **intersection** est la **réunion** des *complémentaires*.

Démonstration

- Pour démontrer que $C = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$ est le complémentaire de $A \cup B$ dans E, nous utilisons la caractérisation ci-dessus. Il nous suffit de démontrer que $C \cup (A \cup B) = E$ et $C \cap (A \cup B) = \emptyset$. Ces calculs reposent sur les propriétés d'associativité et de distributivité rappelées plus haut.

$$\begin{aligned} C \cup (A \cup B) &= (A \cup B) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B) = \big((A \cup B) \cup \complement_E A\big) \cap \big((A \cup B) \cup \complement_E B\big) \\ &= E \cap E \\ C \cap (A \cup B) &= (A \cup B) \cap (\complement_E A \cap \complement_E B) = \big(A \cap \complement_E A \cap \complement_E B\big) \cup \big(B \cap \complement_E A \cap \complement_E B\big) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

- Pour démontrer que $D = \complement_E A \cup \complement_E B$ est le complémentaire de $A \cap B$ dans E, on est amené à conduire des calculs tout à fait analogues aux précédents. □

d. Produit cartésien d'ensembles

Définition : *Soit x et y deux objets. On appelle* ***couple*** *(x, y) la suite formée de deux objets dont le premier est x et le second est y.*

Retenez que :

Corollaire 1.5. Soit x, x', y, y' des objets.

$$(x, y) = (x', y') \text{ si et seulement si } x = x' \text{ et } y = y'.$$

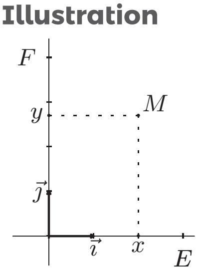
Ne confondez pas le couple (x, y) avec la paire $\{x, y\}$, c'est tout à fait différent. Par exemple, lorsque x et y sont deux objets distincts, on a $(x, y) \neq (y, x)$ tandis que $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Définition : *Soit E, F deux ensembles, le* ***produit cartésien*** *de E et F est l'ensemble, noté $E \times F$ dont les éléments sont les couples (x, y), $x \in E$, $y \in F$.*

$$E \times F = \{(x, y)\,;\ x \in E, y \in F\}.$$

Exemple : formons le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les éléments de ce produit sont les couples (x, y) de nombres réels. On peut se représenter cet ensemble de la manière suivante : munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et associons à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y). Ceci nous permet d'identifier $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ au plan géométrique $\mathcal{P}$.

Illustration



Remarque : inspirez-vous de l'illustration ci-contre pour représenter tout produit cartésien.

Définition : Généralisation —. *Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. Étant donné $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles, on définit le* ***produit cartésien*** *$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ par :*

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

La liste ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *s'appelle un* ***n-uplet***.

Exemple : $\mathbb{R}^3$ peut être identifié à l'espace géometrique $\mathscr{E}$ au moyen du choix d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, ou à l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ par le choix d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

3 Relations sur un ensemble

a. Relations binaires sur un ensemble

Il s'agit simplement de donner une définition rigoureuse du fait qu'on peut mettre en relation des éléments de E et de F. Une fonction de E vers F est un exemple particulier de relation de E vers F.

Γ est appelé **graphe de la relation**.

Définition : *Soit E, F deux ensembles. Une relation $\mathscr{R}$ de E vers F est la donnée d'une partie Γ de $E \times F$. Lorsqu'un couple (x, y) appartient à Γ, on dit que x **est en relation avec** y. On note cette assertion $x\mathscr{R}y$.*
*Une relation de E vers lui-même est appelée une **relation binaire sur** E.*

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire de E. On dit que $\mathscr{R}$ est :*

- *réflexive lorsque pour tout élément $x \in E$, $x\mathscr{R}x$.*
- *symétrique lorsque pour tout couple $(x, y) \in E \times E$, $x\mathscr{R}y$ entraîne $y\mathscr{R}x$.*
- *antisymétrique lorsque pour tout couple $(x, y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ entraîne $x = y$.*
- *transitive lorsque pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$, $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$ entraîne $x\mathscr{R}z$.*

Exemple : dans $\mathbb{N}$, la relation x divise y, notée $x \mid y$, est une relation binaire. Elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

b. Relations d'équivalence sur un ensemble

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathscr{R}$ est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.*

Exemples :

- Relation de congruence sur $\mathbb{R}$: soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$. On définit une relation sur $\mathbb{R}$, appelée **relation de congruence modulo** α par
$$x \equiv y\ [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + k\,\alpha$$
- Relation de congruence sur $\mathbb{Z}$: soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une relation sur $\mathbb{Z}$, appelée **relation de congruence modulo** n par
$$x \equiv y\ [n] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + k\,n$$

Défi ! Montrez que deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence de** x et on note $cl(x)$ la partie de E formée de tous les éléments y équivalents à x :*
$$cl(x) = \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$$

c. Relation d'ordre sur un ensemble

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.*
*On dit que $\mathscr{R}$ est une **relation d'ordre** sur E si $\mathscr{R}$ est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}$, ou dans $\mathbb{N}$, la relation $x \leqslant y$ est une relation d'ordre, la relation $x = y$ est une relation d'équivalence. Quel est son graphe au fait ? Dans $\mathscr{P}(E)$, $A \subset B$ est une relation d'ordre et $A = B$ est une relation d'équivalence.

Définition : *Un **ensemble ordonné** est un couple $(E, \preceq)$ où $\preceq$ est une relation d'ordre sur E.*

Définition : *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.*

- *Deux éléments x, y de E sont dits **comparables** si $(x \preceq y)$ ou $(y \preceq x)$.*
- *Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, on dit que est un ensemble **totalement ordonné**. Dans le cas contraire, on dit que $(E, \preceq)$ est **partiellement ordonné**.*

Exemple : $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné, tandis que $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ n'est que partiellement ordonné.

⚠ La relation d'ordre-strict n'est pas une relation d'ordre ! Pourquoi ?

Notation : *On note parfois $\prec$ la relation dite d'**ordre-strict** associée à $\preceq$. On note $x \prec y$ lorsque $x \preceq y$ et $x \neq y$.*

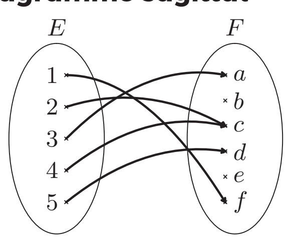
Section II. Applications

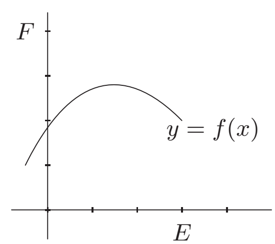
1 Définition et exemples d'applications

a. Graphe d'une application

Intuitivement, une application $f : E \to F$ est un *procédé* qui à tout élément de l'ensemble de départ E associe *sans ambiguïté* un unique élément de F. On peut se figurer ce procédé sous deux formes distinctes :

diagramme sagittal ou **graphe de l'application**





En d'autres termes, à tout élément x de E, "Γ" permet d'associer un unique élément y de F. Cet élément est appelé **image** de x par f. On le note $f(x)$.

Définition : *Soit E, F deux ensembles et Γ une partie de $E \times F$. On dit que Γ est le **graphe d'une application** f si pour **tout** élément $x \in E$, il existe **un unique élément** $y \in F$ tel que le couple (x, y) appartienne à Γ.*

En pratique : On ne décrit pas le graphe d'une application, au contraire on insiste sur le *procédé* qui à x associe son image. C'est pour cela qu'une application f de E vers F est notée $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Vocabulaire : *Soit $f : X \to Y$ une application. Alors*

- *E est appelé l'**ensemble de départ**, F l'**ensemble d'arrivée**,*
- *$\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F |\ y = f(x)\}$ est appelé le **graphe** de f,*
- *Pour tout $x \in X$, l'élément $y = f(x)$ de F est appelé **image** de x par f.*
- *Pour tout $y \in F$, un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé un **antécédent** de y par f.*