CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS

1.1 Définitions et propriétés de base

1.1.1 Espace vectoriel sur un corps quelconque

Définition 1.1.1
Soient $(E,+)$ *un* ***groupe commutatif*** *et* $(K,+,\times)$ *un* ***corps commutatif****. On dit que* E *est un* K*-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur* K*, s'il existe une application de* $K \times E$ *vers* E*, appelée loi externe sur* E*, qui à* $(\alpha, x) \in K \times E$ *fait correspondre* $\alpha \cdot x$*, vérifiant les axiomes suivants :*

i) $\forall x \in E,\ 1_K \cdot x = x.$

ii) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E,\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$

iii) $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E,\ (\alpha\beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$

iv) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \forall y \in E,\ \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Dans ce cas, les éléments de E *sont appelés des* ***vecteurs*** *et se notent* $x, y, z, \ldots$*, tandis que les éléments de* K *sont appelés des* ***scalaires*** *et se notent* $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \cdots$.

1.1.2 Conséquences de la définition

Soit E un K-espace vectoriel, alors on a les règles de calcul suivantes :

a) $\forall x \in E,\ 0_K \cdot x = 0_E.$

b) $\forall \lambda \in K,\ \lambda \cdot 0_E = 0_E.$

c) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E,\ \ \lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E.$

Démonstration. a) D'après l'axiome ii) de la définition, nous avons

$$0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$$

donc $0_K \cdot x = 0_E$.

b) D'après l'axiome iv) de la définition, nous avons

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

c) $(\Longrightarrow)$ Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$ et montrons que $x = 0_E$. Puisque $\lambda \cdot x = 0_E$, alors $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E$, or d'après l'axiome iii) de la définition, nous avons

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot x = 1_K \cdot x$$

donc d'après l'axiome i) de la définition, on a $x = 0_E$.

$(\Longleftarrow)$ Déjà vu. □

1.1.3 Exemples fondamentaux

1. Soient $(L, +, \times)$ un corps commutatif et K un sous-corps de L, alors L peut-être considéré comme un K-espace vectoriel pour la loi externe définie comme suit,

$$\begin{aligned} K \times L &\longrightarrow L \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = \lambda \times x \end{aligned}$$

Par exemple, $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{Q}$ ou $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}$. En particulier, tout corps K peut-être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.

2. Soit K un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$, K^n est un K-espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times K^n &\longrightarrow K^n \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Soient K un corps commutatif et $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K. Alors $K[X]$ est un K-espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times K[X] &\longrightarrow K[X] \\ (\lambda, P) &\longmapsto \lambda \cdot P = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_i) X^i \end{aligned}$$

où $P = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i$.

4. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur le même corps K. Alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un K-espace vectoriel pour la loi externe définie par l'application de $K \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n)$ vers $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ qui à $(\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \in K \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n)$ fait correspondre

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

   $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ s'appelle l'espace vectoriel produit des K-espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_n$.

5. Soient E un K-espace vectoriel, A un ensemble non vide quelconque et E^A l'ensemble de toutes les applications de A vers E. Alors E^A est un K-espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times E^A &\longrightarrow E^A \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

   où $\lambda \cdot f$ est l'application de A vers E définie par,

$$\forall a \in A,\ (\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$$

   Rappelons aussi que si f et g sont deux applications de A vers E, alors $f + g$ est l'application de A vers E définie par,

$$\forall a \in A,\ (f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définition et exemples

Définition 1.2.1
Soient E un K-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E, si
i) $(F, +)$ *est un sous-groupe de* $(E, +)$.
ii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Remarque 1
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel pour la loi externe induite par celle de E :

$$\begin{aligned} K \times F &\longrightarrow F \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1
Soient E un K-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E, si, et seulement si,

i) $F \neq \emptyset$.
ii) $\forall x \in F, \forall y \in F,\ x + y \in F$.
iii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Démonstration. $(\Longrightarrow)$ Trivial.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que F vérifie i), ii) et iii) et montrons que $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$. Donc on doit vérifier que,

— $F \neq \emptyset$.
— $\forall x \in F, \forall y \in F,\ x - y \in F$.

Soient $x \in F$ et $y \in F$, puisque, par hypothèse $F \neq \emptyset$, alors il suffit de voir que $x - y \in F$.
D'après iii), $(-1_K) \cdot y \in F$ avec $(-1_K) \cdot y = -y$, donc d'après ii), $x + (-y) \in F$. $\square$

Remarque 2
Soit K un corps commutatif. Pour montrer qu'un ensemble F est un K-espace vectoriel, il suffit, dans la plupart des cas, de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un K-espace vectoriel connu.

Exemples

1. *Pour tout K-espace vectoriel E, les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*
2. *Soit K un corps commutatif. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $K_n[X]$ la partie de $K[X]$ définie par,*

$$K_n[X] = \{P \in K[X] \ : \ \deg(P) \leq n\}$$

Alors $K_n[X]$ est un K-espace vectoriel.
Il suffit de vérifier que $K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

i) *Si on suppose que* $\deg(0) = -\infty$, *alors pour tout entier $n \geq 0$, $K_n[X]$ contient le polynôme nul, par suite $K_n[X] \neq \emptyset$.*

ii) *On sait que pour tout $P \in K[X]$ et pour tout $Q \in K[X]$, on a*

$$\deg(P + Q) \leq \sup(\deg(P), \deg(Q))$$

Donc si $\deg(P) \leq n$ *et* $\deg(Q) \leq n$, *alors* $\deg(P + Q) \leq n$ *et par suite, on a $P + Q \in K_n[X]$.*

iii) *On sait, aussi, que pour tout* $\lambda \in K$ *et pour tout* $P \in K[X]$,

$$\deg(\lambda P) \leq \deg(P) \ \text{ et si } \lambda \neq 0 \text{ alors } \ \deg(\lambda P) = \deg(P)$$

Donc si $\lambda \in K$ *et* $P \in K_n[X]$, *alors* $\lambda \cdot P \in K_n[X]$.

3. *L'ensemble* F *des suites réelles qui tendent vers zéro à l'infini, est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,*

$$F = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

Il suffit de montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *alors* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, *l'ensemle des fonctions continues de* I *vers* $\mathbb{R}$, *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Il suffit de vérifier que* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^I$, *l'espace vectoriel de toutes les applications de* I *vers* $\mathbb{R}$.

1.2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Intersection

Proposition 1.2.2
Soit E *un* K*-espace vectoriel, alors l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de* E *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, où I est un ensemble d'indice quelcomque et non vide. La vérification que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E est laissée à titre d'exercice.
Rappelons que,

$$x \in \bigcap_{i\in I} F_i \Longleftrightarrow \forall i \in I, \ x \in F_i$$

Réunion

La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E. Cependant on a la proposition suivante :

Proposition 1.2.3
Soient E un K-espace vectoriel quelconque, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et montrons que $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$. Pour cela, supposons, par absurde, que $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$.

$$F \nsubseteq G \implies \exists x \;:\; x \in F \text{ et } x \notin G$$
$$F \nsubseteq G \implies \exists y \;:\; y \in G \text{ et } y \notin F$$

$F \cup G$ étant un sous-espace vectoriel, donc $x + y \in F \cup G$, par suite, on a

$$x + y \in F \text{ ou } x + y \in G$$

Si $x + y \in F$, puisque $y = (x + y) - x$, alors $y \in F$, ce qui est absurde, car $y \notin F$.
Si $x + y \in G$, puisque $x = (x + y) - y$, alors $x \in G$, ce qui est encore absurde, car $x \notin G$.
Donc notre supposition de départ est fausse, par suite, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

($\Longleftarrow$) Trivial. □

Remarque 3
La proposition précédente se généralise à un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E :

Proposition 1.2.4
Soient E un K-espace vectoriel quelconque et n un entier ≥ 2. On suppose que K est un corps de caractéristique $\geq n$.
Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cup F_2 \cdots \cup F_n$ est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si, il existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tel que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $F_j \subseteq F_i$.

Démonstration. ($\Longleftarrow$) Trivial.

($\Longrightarrow$) On procède par récurrence sur $n \geq 2$.
Le cas $n = 2$ est déjà vu, car tout corps est de caractéristique ≥ 2.
Supposons, donc que $n > 2$ et que la proposition est vérifiée pour tout entier $m < n$. Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, tel que $F_1 \cup F_2 \dots \cup F_n$ soit un sous-espace vectoriel de E.
Supposons, par absurde, que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_j \nsubseteq F_i$, donc, en particulier, on a $\bigcup_{j=1}^{n-1} F_j \nsubseteq F_n$. D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $F_n \nsubseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j$.
Soient $x \in F_n$ et $y \in \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j$, tels que $x \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j$ et $y \notin F_n$.

$$(x \in F_n \;\text{ et }\; y \notin F_n) \Longrightarrow \forall \lambda \in K, \;\; \lambda x + y \notin F_n$$

Or, $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ est un sous-espace vectoriel de E, donc pour tout $\lambda \in K$, on a $\lambda x + y \in \bigcup_{j=1}^{n} F_j$. Remarquons que si $\lambda x + y \in F_j$, pour un certain $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, alors pour tout $\mu \neq \lambda$, $\mu x + y \notin F_j$, car sinon, on aura $x \in F_j$, ce qui est absurde. K est de caractéristique $\geq n$, donc l'ensemble $\{1_K, 21_K, \dots, (n-1)1_K\}$ est de cardinal $n-1$, par suite, d'après la remarque précédente, pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, il existe un unique λ_j, avec $\lambda_j \in \{1_K, 21_K, \dots, (n-1)1_K\}$, tel que, $\lambda_j x + y \in F_j$. Or $y \in \bigcup_{i=1}^{n-1} F_j$, donc il existe $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tel que, $y \in F_j$, donc $x \in F_j$, car $\lambda_j x + y \in F_j$ et $\lambda_j \neq 0$, ce qui est absurde, car $x \notin F_j$. □

Somme

Soient E un K-espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, avec $n \geq 2$. On définit la partie de E, notée $F_1 + F_2 + \dots + F_n$, par
$x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$, si et seulement si, il existe
$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Proposition 1.2.5
$F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel somme des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Démonstration. La vérification que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est un sous-espace vectoriel est laissée à titre d'exercice. $\square$

Somme directe

Définition 1.2.2
Soient E un K-espace vectoriel et F_1, F_2, …, F_n des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1+F_2+\cdots+F_n$ est directe, si pour tout $x \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, il existe ***un unique*** *$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.*

Notations
Dans le cas où la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe, on la note,

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \quad \textit{ou encore} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

Lemme 1.2.1
La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe, si et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, on a

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. On doit vérifier que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Comme la somme est directe et puisque on a $0 = 0 + 0 + \ldots + 0$, alors d'après l'unicité de la décomposition, on a $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

($\Longleftarrow$) Soit $x \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, tel que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et $x = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. on doit alors montrer que
$x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$.
$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et $x = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, donc on aura

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_n - y_n) = 0$$

par suite, si on pose $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$, … et $z_n = x_n - y_n$, alors on aura
$(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ et $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$, donc, par hypothèse, on a $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$. $\square$