Partie A : OUTILS MATHEMATIQUES

CHAPITRE I

VECTEURS

1 - GENERALITES

1.1 - Distinctions fondamentales

Les vecteurs sont des entités mathématiques utilisées pour représenter commodément certaines grandeurs physiques. Mais le terme étant employé dans différents cas, il convient d'être très précis. On distingue en effet des grandeurs physiques de complexités diverses qui nécessitent, pour les représenter, des images différentes.

a) Grandeurs scalaires

Les grandeurs scalaires sont les grandeurs complètement définissables par le produit d'une unité et d'un nombre unique (leur mesure).
La mesure d'une grandeur scalaire est donc son rapport à l'unité. L'unité est une grandeur dont la mesure est choisie égale à 1.

On distingue :

- *des grandeurs intensives* : celles dont la mesure se définit en un point de l'espace.
  exemples : temps, température, pression, densité...
- *des grandeurs extensives :* celles relatives à tout un ensemble matériel et dont la mesure est la somme des mesures des différentes parties de l'ensemble.
  exemples : longueur, surface, volume, masse, moment d'inertie, énergie....

b) Grandeurs vectorielles

Les grandeurs vectorielles sont celles dont la définition implique, en plus des notions d'unité et de mesure, une notion d'orientation. Elles sont donc plus complexes et pour les définir, il faut **3** nombres (ou paramètres). On les définit par le produit de l'unité par un vecteur.

Ces grandeurs peuvent également être

- *intensives* : déplacement, vitesse, accélération, force, moment...
- *extensives* : quantités de mouvement et d'accélération, moments cinétiques et dynamiques ...

c) Vecteurs glissants

Les effets mécaniques d'une force agissant sur un ensemble matériel dépendent à la fois de la grandeur vectorielle force et de son point d'application au système.

Cependant, pour un solide (système indéformable), le résultat de cette action est le même quel que soit le point d'application sur le « support » de la force.
Le vecteur glissant est l'entité mathématique qui représente l'ensemble d'une force et de son support.
Sa définition nécessite **5** paramètres.

d) Torseurs

Un torseur est l'entité qui permet de représenter *globalement* un ensemble d'actions mécaniques (donc de vecteurs glissants)
Sa définition nécessite **6** paramètres.

1.2 - Vecteurs

La notion de vecteur (qu'on nomme aussi vecteur libre) s'est imposée pour représenter simplement les grandeurs vectorielles indépendamment de l'unité et traiter globalement l'ensemble des éléments qui les constituent : direction et mesure

Pour définir une *direction* dans l'espace physique, il faut deux angles. Un large choix est d'ailleurs possible. Par exemple :

- longitude et latitude
- hauteur et azimut
- précession et nutation...

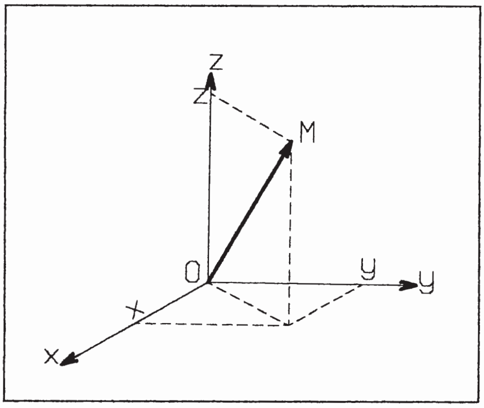
Un troisième paramètre est nécessaire pour définir quantitativement un vecteur c'est-à-dire par rapport à un vecteur de même direction choisi comme vecteur unité : c'est sa *mesure*, nombre algébrique dont le signe précise le sens.

Image d'une grandeur vectorielle :

Un premier exemple de grandeur vectorielle pouvant servir d'image est celui d'un déplacement dans une direction donnée **à partir d'un point origine préalablement et indépendamment fixé**.

Le vecteur est ici le segment de droite orienté OM, ou encore le point M dans un repère d'origine O. On le notera $\overrightarrow{OM}$ ou $\vec{M}$ et on pourra le définir par l'ensemble des coordonnées de M dans tout repère d'origine O.
On écrira ici

$$\overrightarrow{OM} = \vec{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$$



L'indication portée en indice précise le repère utilisé.

En généralisant et en considérant des grandeurs de natures physiques diverses, on appelle vecteur tout ensemble ordonné de trois nombres qu'on appelle les composantes du vecteur.

La notion se généralise encore dans des espaces à n dimensions où le vecteur est alors un ensemble ordonné de n composantes.

1.3 - Bipoints

a) Définition

Un bipoint (on dit éventuellement « vecteur lié ») est un ensemble ordonné de deux points.
Si A et B sont ces deux points (qu'on appelle origine et extrémité), on note le bipoint correspondant (A,B).
On représente le bipoint par un segment de droite orienté de A vers B. La définition d'un bipoint nécessite 6 paramètres : les coordonnées des deux points dans un repère de référence $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$. Un bipoint n'est donc pas un vecteur.

b) Vecteur associé

Les composantes canoniques d'un bipoint (A,B) sont les trois nombres

$$(x_B - x_A),\ (y_B - y_A),\ (z_B - z_A)$$

Le vecteur associé au bipoint (A,B) est l'ensemble ordonné de ses trois composantes canoniques.

On le note
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_R$$

Par extension, on dira que le bipoint (A,B) est équipollent au vecteur $\overrightarrow{AB}$

c) Longueur du bipoint (A,B)

C'est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, soit
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

d) Bipoints équipollents

Deux bipoints (A,B) et (A',B') sont dits équipollents s'ils sont associés au même vecteur, c'est-à-dire s'ils ont les mêmes composantes canoniques.
On note

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \\ z_{B'} - z_{A'} \end{pmatrix}_R \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_B - x_A = x_{B'} - x_{A'} \\ y_B - y_A = y_{B'} - y_{A'} \\ z_B - z_A = z_{B'} - z_{A'} \end{cases}$$

◆ **Propriétés :**

- ① Il résulte immédiatement des relations précédentes que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, c'est-à-dire que si (A,B) et (A',B') sont équipollents, alors (A,A') et (B,B') sont équipollents.

- ② Il résulte immédiatement de la définition que deux bipoints équipollents ont même direction, même sens (ceux définis par $\overrightarrow{AB}$) et même longueur.

e) Remarque

Un bipoint (A,B) (soit 6 paramètres) peut être considéré comme l'ensemble

- d'un point (son origine A soit 3 paramètres),
- et d'un vecteur (le vecteur associé $\overrightarrow{AB}$ soit aussi 3 paramètres).

2 - PROPRIETES DES VECTEURS

2.1 - Somme

a) Définition

La somme de deux vecteurs est le vecteur dont les composantes sont respectivement la somme des composantes analogues

$$\text{si } \vec{V_1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_R \quad \text{et } \vec{V_2} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_R \qquad \text{alors} \qquad \vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_1 + Y_2 \\ Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}_R$$

b) Propriétés

- La somme est associative : $\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = (\vec{V_1} + \vec{V_2}) + \vec{V_3}$
- La somme est commutative : $\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$
- Elle possède un élément neutre : $\vec{0}$ (vecteur de mesure nulle)
- Chaque élément $\vec{V}$ possède un symétrique noté $-\vec{V}$

c) Relation de Chasles

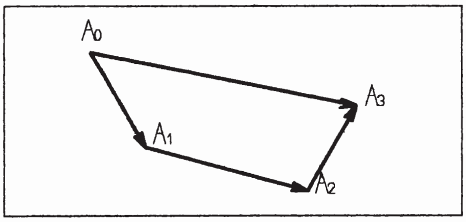
Si A, B, C sont trois points quelconques, on a immédiatement pour les vecteurs associés aux trois bipoints (A,B), (B,C) et (A,C) :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

d) Image de la somme $\quad \vec{S} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{V_i})$

On construit bout à bout les bipoints successifs (A_{i-1}, A_i) tels que $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \vec{V_i}$. C'est-à-dire

$$\vec{S} = \overrightarrow{A_0 A_n}$$



2.2 - Multiplication par un scalaire

a) Définition

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire a est le vecteur $\vec{W}$ dont les composantes sont celles de $\vec{V}$ multipliées par a.

$$\text{Si} \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_R \qquad \text{alors} \qquad \vec{W} = a \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} a\,X \\ a\,Y \\ a\,Z \end{pmatrix}_R$$

b) Image

La direction de $\vec{W}$ est celle de $\vec{V}$. Sa mesure est celle de $\vec{V}$ multipliée par a.

Application

Si $\vec{v}$ est choisi comme *vecteur unitaire*, $\vec{V} = V\,\vec{v}$ a pour mesure V

c) Complément

L'opération

- possède un élément neutre : le réel 1: $1 \cdot \vec{V} = \vec{V}$
- est associative pour la multiplication des réels : $a_1 \cdot (a_2 \cdot \vec{V}) = (a_1 \cdot a_2) \cdot \vec{V}$
- est distributive pour l'addition des vecteurs : $a \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = a \cdot \vec{V}_1 + a \cdot \vec{V}_2$
- est distributive pour l'addition des scalaires : $(a_1 + a_2) \cdot \vec{V} = a_1 \cdot \vec{V} + a_2 \cdot \vec{V}$

Remarque

Pour l'ensemble E des vecteurs :
- l'addition est une loi de composition interne associative et commutative avec élément neutre,
- la multiplication par un scalaire est une opération externe associative et distributive avec élément neutre.

En mathématiques, cela fait de cet ensemble un espace vectoriel sur le corps des réels.

2.3 - Base

En mathématiques, on dit que dans un espace vectoriel, n vecteurs $\vec{V}_i$ sont linéairement indépendants si l'égalité $\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{V}_i$ n'est vérifiée que pour tous les coefficients a_i nuls.

La dimension de l'espace est son nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants.

L'espace physique est de dimension 3.
On appelle **base** de cet espace, tout système de 3 vecteurs linéairement indépendants. Tout autre vecteur en est donc une combinaison linéaire.

On appelle **repère** l'ensemble d'un point (l'origine O) et de trois vecteurs linéairement indépendants $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ constituant une base. On le note $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Remarque importante:

Les repères utilisés sont des outils. A ce titre, ils doivent être d'usage commode.
On utilisera donc ici uniquement des repères orthonormés directs .

Un repère orthonormé direct est un repère dont les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ constituant la base sont unitaires, orthogonaux deux à deux et de sens direct dans l'ordre indiqué.
Par définition de la base, tout autre vecteur est une combinaison linéaire des trois vecteurs formant la base. Il peut donc s'écrire

$$\vec{V} = X\,\vec{x} + Y\,\vec{y} + Z\,\vec{z}$$

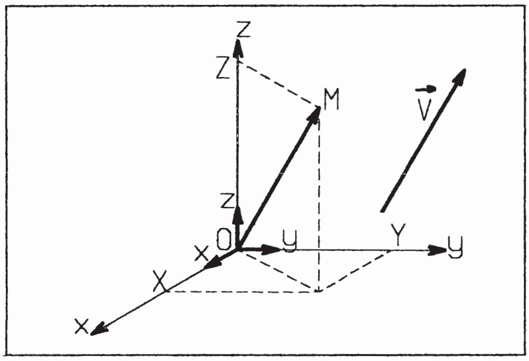
X, Y, Z sont les composantes de $\vec{V}$ dans le repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On écrit $\quad \vec{V} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_R$

Image de $\vec{V}$

On peut prendre pour image de $\vec{V}$ le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{V}$

X, Y et Z sont les coordonnées de M dans R ou les projections de M sur les trois axes issus de O et de vecteurs unitaires respectifs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$.



3 - OPERATIONS SUR LES VECTEURS

3.1 - Produit scalaire

a) Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le SCALAIRE égal au produit des normes des vecteurs par le cosinus de leur angle.
On le note $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \left\|\vec{V}_1\right\| \cdot \left\|\vec{V}_2\right\| \cdot \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Remarque

$\left\|\vec{V}_2\right\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est la mesure de la projection de $\vec{V}_2$ sur $\vec{V}_1$, de même que

$\left\|\vec{V}_1\right\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est la mesure de la projection de $\vec{V}_1$ sur $\vec{V}_2$.

Le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ est donc égal au produit des mesures de $\vec{V}_1$ et de la projection de $\vec{V}_2$ sur $\vec{V}_1$ (et réciproquement)

b) Propriétés

- Le produit scalaire est **commutatif :** $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$

- Le produit scalaire est **nul**
  - **SI l'un des vecteurs est nul**

    ou
  - **SI les deux vecteurs sont orthogonaux**.

- *Multiplication par un scalaire* : $(a \cdot \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = a \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$
- *Le produit scalaire est* **distributif** *pour l'addition des vecteurs* :

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3$$

c) Expression analytique dans une base orthonormée directe

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ donnés par leurs composantes dans une même base

$$\vec{V}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_R \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = X_2\vec{x} + Y_2\vec{y} + Z_2\vec{z} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_R$$

En tenant compte des propriétés précédentes, on obtient immédiatement

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_R \cdot \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_R = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}$$

3.2 - Produit vectoriel de deux vecteurs

a) Définition

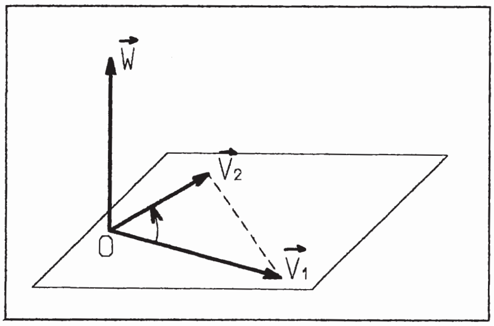
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le VECTEUR noté $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ ainsi défini :

- **sa direction est orthogonale au plan formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$**
- **son sens est tel que le trièdre $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{W}$ soit direct**
- **sa norme est** $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot |\sin\theta|$

l'angle θ étant l'angle des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

Remarque

La norme du produit vectoriel $\vec{W}$ est égale au double de la mesure de l'aire du triangle construit sur les deux vecteurs. C'est également la mesure de l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.



b) Propriétés

- Le produit vectoriel est **anticommutatif** : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

- Le produit vectoriel est **nul**
  - **SI l'un des vecteurs est nul**

  ou
  - **SI les deux vecteurs sont colinéaires**

- *Multiplication par un scalaire* : $(k \cdot \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = k \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$
- *Le produit vectoriel est distributif pour l'addition des vecteurs.*

$$\vec{V} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V} \wedge \vec{V}_1 + \vec{V} \wedge \vec{V}_2$$

c) Expression analytique du produit vectoriel dans une base

Les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont donnés par leurs composantes dans une même base.

$$\vec{V}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z}$$
$$\vec{V}_2 = X_2\vec{x} + Y_2\vec{y} + Z_2\vec{z}$$

En utilisant les propriétés précédentes et la disposition pratique on obtient

$$\boxed{\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} Y_1 \cdot Z_2 - Y_2 \cdot Z_1 \\ Z_1 \cdot X_2 - Z_2 \cdot X_1 \\ X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1 \end{pmatrix}_R}$$

3.3 - Produit mixte de trois vecteurs libres

a) Définition

On appelle produit mixte de trois vecteurs libres $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ le SCALAIRE M défini par

$$M = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

Remarques

① M est égal volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

② En utilisant la notion de déterminant, le produit mixte s'écrit

$$M = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

b) Propriétés

◆: Le **produit mixte est nul SI** l'un des vecteurs est nul
SI deux des vecteurs sont colinéaires
SI les trois vecteurs sont coplanaires

◆ Le produit mixte est **inchangé** si on effectue une **permutation circulaire** sur les trois vecteurs (en effet, on ne modifie pas le volume du parallélépipède).

◆ La place des signes opérationnels est sans importance si bien qu'on note le produit mixte sous la forme

$$\boxed{M = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)}$$

Mais dans le développement, il faut toujours effectuer d'abord le produit vectoriel avant d'effectuer le produit scalaire.

3.4 - Double produit vectoriel

Définition

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ $\vec{V}_3$ est le VECTEUR

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

Remarque

Aucune permutation n'est possible sur l'ensemble des trois vecteurs.