

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	5
À LA RACINE DES NOMBRES	13
1. Les nombres entiers et rationnels positifs.....	14
2. Un héritage oriental : les nombres négatifs.....	15
3. Des nombres connus depuis Pythagore : les irrationnels.....	17
4. Irrationalité de $\sqrt{2}$	18
5. Les nombres irrationnels à travers les âges.....	19
6. Les nombres complexes.....	22
7. Puissances et racines.....	26
LES MATHÉMATIQUES EN MÉSOPOTAMIE	31
1. Naissance d'une civilisation.....	31
2. Les Sumériens.....	32
3. Les Babyloniens.....	33
4. Les Assyriens.....	34
5. Les Perses.....	34
6. Les premiers textes mathématiques.....	35
7. Système de numération babylonienne.....	37
7.1. Les deux signes : le clou et le chevron.....	37
7.2. Une notation de position pour différencier les puissances de 60... ..	38
7.3. L'absence du zéro.....	40
7.4. Les expressions fractionnaires.....	41
7.5. La représentation du zéro.....	42
7.6. Le choix de deux bases sexagésimale et décimale... ..	42
8. Représentation de la valeur $\sqrt{2}$	44
9. Conclusion.....	45
ALGORITHME DE BABYLONE	47
1. Problème.....	47

2.	Méthode.....	47
3.	Représentation graphique de la méthode.....	49
4.	Critère d'arrêt.....	50
5.	Estimation du nombre de boucles de calcul.....	50
6.	Algorithme de la méthode.....	54
7.	Exemple de calcul : $\sqrt{2}$	55
8.	Conclusion.....	57

ORIGINE DES MATHÉMATIQUES GRECQUES... ..59

1.	Situation géographique.....	59
2.	Le néolithique.....	60
3.	La civilisation minoenne.....	60
4.	L'arrivée des Grecs.....	61
5.	La civilisation mycénienne.....	62
6.	Les âges obscurs.....	64
7.	Les cités grecques.....	65
8.	La colonisation grecque.....	66
9.	Les philosophes ioniens.....	68
10.	Les guerres médiques.....	71
11.	Les éléates.....	73
12.	La puissance grandissante d'Athènes.....	73
13.	Les sophistes.....	74
14.	Les philosophes.....	76
15.	La guerre du Péloponnèse.....	79
16.	Le déclin de Sparte.....	80
17.	La suprématie de la Macédoine.....	81
18.	De nombreux paradoxes à l'origine des mathématiques.....	82

PYTHAGORE DE SAMOS.....85

1.	Biographie de Pythagore de Samos.....	85
2.	Le pythagorisme.....	91
2.1.	Arithmétique pythagoricienne.....	91
2.1.1.	Nombres triangulaires.....	93

2.1.2.	Nombres carrés.....	94
2.1.3.	Nombres pentagonaux.....	95
2.1.4.	Nombres hexagonaux.....	96
2.1.5.	Nombres polygonaux quelconques.....	97
2.1.6.	Représentation des nombres dans l'espace.....	97
2.1.6.1.	Nombres pyramidaux.....	98
2.1.6.2.	Nombres cubiques.....	98
2.1.7.	Nombres parfaits.....	99
2.1.8.	Nombres amiables.....	102
2.2.	Théorie des proportions.....	103
2.3.	Les médiétés.....	104
2.4.	La musique pythagoricienne.....	105
2.5.	L'astronomie pythagoricienne.....	106
3.	La découverte des grandeurs incommensurables.....	108
4.	La géométrie.....	110
5.	Le théorème de Pythagore.....	112

CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES.....117

1.	Problème.....	117
2.	Méthode.....	117
3.	Théorème de Pythagore.....	118
4.	Théorème de la hauteur.....	118
5.	Construction de $x = \sqrt{n} = \sqrt{a^2+b^2}$	119
6.	Construction de $x = \sqrt{n} = \sqrt{c^2-b^2}$	120
7.	Construction de $\sqrt{n} = \sqrt{pq}$	121
7.1.	Remarque sur la construction de $\sqrt{n} = \sqrt{pq}$	122
7.2.	Autre construction de $\sqrt{n} = \sqrt{pq}$	123
8.	Construction géométrique de la série $x_n = \sqrt{n}$	125
9.	Conclusion.....	126

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.....127

1.	Problème.....	127
----	---------------	-----

2.	Arithmétique pythagoricienne et progressions arithmétiques ..	127
3.	Méthode.....	129
3.1.	Soit n un carré parfait tel que $n = x^2$, avec x entier non nul... ..	129
3.2.	Soit n un nombre quelconque entier non nul.....	130
3.2.1.	Domaines d'appartenance des coefficients i, j, k, \dots correspondant aux poids $10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, \dots$..	134
4.	Exemple : calculer $\sqrt{2}$ au millionième.....	137
5.	Estimation du nombre de boucles de calcul et critère d'arrêt. ..	139
6.	Algorithme de la méthode.....	140
7.	Prolongement de la méthode.....	141
8.	Conclusion.....	143

L'ÉCOLE D'ALEXANDRIE..... 145

1.	Fondation de la ville d'Alexandrie.....	145
2.	L'école de mathématiques du Musée.....	147
3.	Déclin de la culture hellénique.....	148
4.	Rétablissement de la vie culturelle à Alexandrie.....	150
5.	Le dernier souffle de l'école d'Alexandrie.....	152
6.	Fin des mathématiques grecques.....	154
7.	Les commentateurs.....	155
8.	Des ruines, de la poussière et des cendres.....	156

ALGORITHME DE HÉRON D'ALEXANDRIE..... 159

1.	Problème.....	159
2.	Méthode.....	159
3.	Étude de la croissance et de la convergence.....	160
3.1.	n est un carré parfait.....	160
3.2.	n n'est pas un carré parfait.....	160
4.	Convergence de la suite.....	164
5.	Conclusion sur la croissance et la convergence de la suite.....	164
6.	Représentation graphique de la méthode.....	165
7.	Critère d'arrêt.....	165
8.	Estimation du nombre de boucles de calcul.....	166

2.	Arithmétique pythagoricienne et progressions arithmétiques ..	127
3.	Méthode.....	129
3.1.	Soit n un carré parfait tel que $n = x^2$, avec x entier non nul... ..	129
3.2.	Soit n un nombre quelconque entier non nul.....	130
3.2.1.	Domaines d'appartenance des coefficients i, j, k, \dots correspondant aux poids $10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, \dots$..	134
4.	Exemple : calculer $\sqrt{2}$ au millionième.....	137
5.	Estimation du nombre de boucles de calcul et critère d'arrêt. ..	139
6.	Algorithme de la méthode.....	140
7.	Prolongement de la méthode.....	141
8.	Conclusion.....	143

L'ÉCOLE D'ALEXANDRIE..... 145

1.	Fondation de la ville d'Alexandrie.....	145
2.	L'école de mathématiques du Musée.....	147
3.	Déclin de la culture hellénique.....	148
4.	Rétablissement de la vie culturelle à Alexandrie.....	150
5.	Le dernier souffle de l'école d'Alexandrie.....	152
6.	Fin des mathématiques grecques.....	154
7.	Les commentateurs.....	155
8.	Des ruines, de la poussière et des cendres.....	156

ALGORITHME DE HÉRON D'ALEXANDRIE..... 159

1.	Problème.....	159
2.	Méthode.....	159
3.	Étude de la croissance et de la convergence.....	160
3.1.	n est un carré parfait.....	160
3.2.	n n'est pas un carré parfait.....	160
4.	Convergence de la suite.....	164
5.	Conclusion sur la croissance et la convergence de la suite.....	164
6.	Représentation graphique de la méthode.....	165
7.	Critère d'arrêt.....	165
8.	Estimation du nombre de boucles de calcul.....	166

9.	Algorithme de la méthode.....	..169
10.	Calcul de $\sqrt{2}$: soit $a_1 = 1$170
11.	Conclusion.....	..171

FRACTIONS CONTINUES..... ..173

1.	Problème.....	..173
2.	Fractions continues.....	..173
3.	Méthode.....	..175
4.	Étude de la croissance et de la convergence.....	..179
5.	Représentation graphique de la méthode.....	..183
6.	Critère d'arrêt.....	..183
7.	Estimation du nombre de boucles de calcul.....	..184
8.	Algorithme de la méthode.....	..185
9.	Exemple de calcul : $\sqrt{2}$188
10.	Conclusion.....	..189

L'EUROPE À LA RENAISSANCE..... ..191

1.	La Renaissance.....	..191
2.	L'imprimerie.....	..195
3.	La diffusion du savoir.....	..198
3.1.	Les petites Académies privées.....	..198
3.2.	Les Académies officielles.....	..199
3.3.	Les échanges épistolaires.....	..200
3.4.	Les périodiques.....	..201
3.5.	Les voyages.....	..202

UNE DÉCOUVERTE POUR RATTRAPER LE TEMPS PERDU : LE LOGARITHME..... ..203

1.	Le calcul au XVI ^e siècle.....	..203
2.	Comment transformer une multiplication en une addition ?..	..204
3.	À la recherche des logarithmes.....	..206
4.	La table de logarithmes de John Napier.....	..209
5.	Logarithmes de Briggs, dits vulgaires.....	..211

6.	Baguettes de Napier.....	..212
7.	Les logarithmes de Jobst Bürgi.....	..213
8.	Impact de la découverte des logarithmes.....	..214
9.	Du logarithme à la règle à calcul.....	..216

CALCUL LOGARITHMIQUE..... ..219

1.	Problème.....	..219
2.	Propriétés fondamentales des logarithmes.....	..219
3.	Logarithmes décimaux.....	..222
4.	Logarithmisation et potentialisation.....	..225
4.1.	Exemple : logarithmisation de 20,24374.....	..225
4.2.	Exemple : potentialisation de 2,303 1972.....	..226
5.	Méthode de calcul des racines carrées.....	..228
6.	Exemple : calculer $\sqrt{2}$230
7.	Précision des résultats.....	..231
7.1.	Erreur due à la logarithmisation de n.....	..231
7.1.1.	Erreurs sur les logarithmes de a et b.....	..231
7.1.2.	Erreur due à l'interpolation.....	..232
7.1.3.	Erreur sur l'écriture du résultat.....	..234
7.1.4.	Erreur totale sur la logarithmisation de n.....	..234
7.2.	Erreur sur le demi-logarithme de n.....	..235
7.3.	Erreur due à la potentialisation de $\log x$236
7.3.1.	Erreur d'interpolation.....	..236
7.3.2.	Erreur due à l'incertitude sur les valeurs de $\log x$, $\log a$ et $\log b$239
7.3.3.	Erreur totale sur x239
8.	Conclusion.....	..240

LA RÈGLE À CALCUL..... ..241

1.	Problème.....	..241
2.	Règles à calcul.....	..241
3.	Principe des règles à calcul.....	..243
3.1.	Construction des échelles.....	..243

3.2. Graduation des échelles.....	..247
4. Utilisation pratique de la règle.....	..248
4.1. La multiplication.....	..249
4.2. La division.....	..250
4.3. Remarques importantes251
4.4. Opérations en chaîne.....	..253
5. Recherche des racines carrées.....	..253
6. Exemple : recherche de $\sqrt{2}$254
7. Précision des résultats.....	..255
8. Conclusion.....	..255

LE COMPAS DE PROPORTION.....

1. Introduction.....	..257
2. Le compas de proportion.....	..258
3. Méthode.....	..259
3.1. La ligne des parties égales.....	..261
3.1.1. Partage d'un segment en n parties égales.....	..262
3.1.2. Partage d'un segment dans une raison donnée..	..263
3.1.3. Multiplication.....	..264
3.1.4. Division.....	..265
3.2. La ligne des plans.....	..265
3.2.1. Construction de la ligne des plans.....	..266
3.2.1.1. Construction des carrés parfaits.....	..266
3.2.1.2. Construction des valeurs $\sqrt{n} = \sqrt{ab}$267
3.2.1.3. Construction des valeurs \sqrt{n} tel que $n = a^2 + b^2$ ou $n = a^2 - b^2$268
3.2.1.4. Construction des valeurs $\sqrt{n} = \sqrt{a^2x}$269
3.2.2. Construction d'un triangle A'B'C' d'aire n fois celle du triangle ABC et semblable au triangle ABC.....	..269
3.2.3. Recherche d'une moyenne géométrique.....	..270
3.2.4. Recherche d'une racine carrée.....	..270
4. Conclusion.....	..271

DE LA QUADRATURE À LA DÉRIVÉE.....	..273
1. Les Grecs.....	..273
2. La méthode d'exhaustion.....	..274
3. Les Arabes.....	..277
4. Le Moyen-âge.....	..281
5. Le calcul infinitésimal aux XVI ^e et XVII ^e s.....	..284
6. Les problèmes de tangentes.....	..292
7. Isaac Newton et sa méthode des fluxions.....	..295
7.1. Isaac Newton.....	..295
7.2. La méthode des fluxions.....	..297
8. Leibniz et les différences.....	..301
8.1. Gottfried Wilhelm Leibniz.....	..301
8.2. Le calcul différentiel de Leibniz.....	..302
MÉTHODE DE LA TANGENTE.....	..311
1. Problème.....	..311
2. Méthode.....	..311
3. Description de la méthode de la tangente.....	..312
4. Convergence.....	..314
4.1. Théorème 1.....	..314
4.2. Conditions de convergence.....	..315
4.2.1. Hypothèses de Fourier.....	..315
4.3. Théorème 2.....	..315
5. Vitesse de convergence.....	..315
6. Critère d'arrêt.....	..317
7. Algorithme de Newton.....	..321
8. Application de la méthode de Newton pour la recherche de $\sqrt{2}$322
9. Conclusion.....	..323
DÉVELOPPEMENTS DE FONCTIONS EN SÉRIES DE TAYLOR.....	..327
1. Problème.....	..327
2. Théorème de Rolle.....	..327

3.	Théorème des accroissements finis.....	..328
4.	Formule de Taylor.....	..329
5.	Application au calcul de racines carrées.....	..331
6.	Exemple : Calcul de $x = \sqrt{2}$334
7.	Calcul d'erreur et estimation de l'ordre du développement en série de Taylor.....	..336
8.	Algorithme de la méthode.....	..340
9.	Conclusion.....	..345

LES TABLES NUMÉRIQUES.....347

1.	Problème.....	..347
2.	Tables numériques.....	..347
3.	Domaine d'utilisation des tables.....	..348
4.	Interpolation proportionnelle.....	..349
5.	Précision des tables.....	..350
5.1.	La lecture du résultat est directe.....	350
5.2.	Une interpolation permet de trouver le résultat.....	..351
5.2.1.	Appréciation de l'erreur due à la méthode.....	..351
5.2.2.	Appréciation de l'erreur sur $\frac{h}{b-a}[f(b)-f(a)]$352
6.	Dispositions des tables.....	..354
7.	Exemple : recherche de $\sqrt{2}$356
8.	Précision des résultats.....	..357
8.1.	Appréciation de l'erreur sur $f(a)$357
8.2.	Appréciation de l'erreur due à l'interpolation.....	..358
8.3.	Appréciation de l'erreur sur $\frac{h}{b-a}[f(b)-f(a)]$358
9.	Conclusion.....	..359

MÉTHODES GRAPHIQUES.....361

1.	Problème.....	..361
2.	Courbe représentative de la fonction $y = \sqrt{n}$361
3.	Recherche de $x = \sqrt{n}$362

3.1. Deux graduations représentent respectivement n , carré parfait, sur l'axe des abscisses et sa racine carrée sur l'axe des ordonnées.....	362
3.2. Une graduation représente n , carré non parfait, sur l'axe des abscisses mais sa racine carrée n'est pas représentée sur l'axe des ordonnées.....	362
3.3. Sur l'axe des abscisses et des ordonnées, aucune graduation ne correspond à n , carré non parfait, et à sa racine carrée.....	364
3.4. Remarque sur le choix des valeurs d'encadrement...	365
3.5. Remarque sur la précision des résultats.....	365
4. Représentation de $x = \sqrt{n}$ dans un système d'axes logarithmiques.....	366
5. Application au calcul de $x = \sqrt{2}$ sur un système d'axes logarithmiques.....	370
6. Erreur sur le résultat.....	371
6.1. Erreur absolue sur la valeur y	371
6.1.1. Erreur relative sur le premier terme.....	372
6.1.2. Erreur relative sur le second terme.....	372
6.1.3. Erreur absolue sur le premier terme.....	373
6.1.4. Erreur absolue sur le second terme.....	373
6.1.5. Erreur absolue globale sur y	373
6.2. Erreur sur la valeur x	374
6.2.1. Erreur absolue sur x	375
6.2.2. Erreur relative sur x	375
7. Application numérique pour $x = \sqrt{2}$	375
8. Abaques.....	376
9. Conclusion.....	379

EXTRACTION DE RACINES CARRÉES AVEC UN BOULIER.....381

1. Introduction.....	381
2. Méthode.....	383

3.	Racine carrée par défaut d'un nombre.....	..385
4.	Pratique de l'extraction d'une racine carrée.....	..387
4.1.	Premier cas : $n < 100$387
4.2.	Deuxième cas : $n > 100$387
5.	Recherche de $\sqrt{2}$ au millième.....	..393
6.	Conclusion sur l'extraction de racines carrées au boulier.....	..397

EXTRACTION DE RACINES CARRÉES AVEC UNE CALCULATRICE MÉCANIQUE : LA CURTA.....

1.	Introduction.....	..399
2.	Méthode.....	..401
3.	Racine carrée par défaut d'un nombre.....	..403
4.	Pratique de l'extraction d'une racine carrée.....	..404
5.	Recherche de $\sqrt{2}$ au millième.....	..405
6.	Conclusion sur l'extraction de racines carrées avec une machine mécanique.....	..406

EXTRACTION DE RACINES CARRÉES À LA PLUME.....

1.	Introduction.....	..409
2.	Introduction à la méthode.....	..410
3.	Racine carrée approchée à une unité près d'un nombre n quelconque.....	..411
4.	Racine carrée approchée au dixième.....	..412
5.	Pratique de l'extraction d'une racine carrée.....	..413
5.1.	Premier cas : $n < 100$413
5.2.	Deuxième cas : $n > 100$413
5.3.	Exemple : recherche de la racine carrée de $n = 54756$415
6.	Recherche de $\sqrt{2}$ au millionième.....	..415
7.	Conclusion sur l'extraction de racines carrées.....	..417

ÉVOLUTION DU CALCUL DE L'ANTIQUITÉ AU XXI^e SIÈCLE.....	..419
1. Introduction.....	..419
2. Les doigts.....	..420
3. Les tables numériques.....	..421
4. Des calculi aux tables à calcul puis aux abaquas.....	..424
5. Les bouliers.....	..429
5.1. Le suanpan.....	..429
5.2. Le soroban.....	..432
5.3. Le stchoty.....	..433
6. Les chiffres arabes et le calcul à la plume.....	..435
7. Le compas de proportion.....	..445
8. Les logarithmes.....	..449
9. Les baguettes de Neper.....	..451
10. Du logarithme à la règle à calcul.....	..452
11. Les machines à calcul mécaniques.....	..454
11.1. L'horloge à calcul.....	..454
11.2. La Pascaline.....	..455
11.2.1. L'addition de deux nombres.....	..458
11.2.2. La soustraction.....	..458
11.2.3. La multiplication.....	..459
11.2.4. La division.....	..459
11.3. La machine à additionner.....	..460
11.4. La première calculatrice mécanique de poche : la Curta.....	..461
12. Les calculatrices électroniques.....	..468
ÉPILOGUE.....	..475
BIBLIOGRAPHIE.....	..481