ECG
MATHS APPROFONDIES

À VOS MATHS

12 ANS de sujets

posés au concours EDHEC
exercices et problèmes corrigés

10e
édition
actualisée
+ Python

CONSEILS de MÉTHODE
CONSEILS de RÉDACTION
AIDE à la RÉSOLUTION
LISTE DES FAUTES à ÉVITER
CONTRE-EXEMPLES SIMPLES

Sylvain RONDY

ellipses

Sujet 2023

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les bibliothèques `numpy` et `numpy.random` de `Python` sont importées respectivement avec `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

Partie 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\mathrm{rg}(M)=1$.

On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f.

2) a) Montrer qu'il existe une matrice $L=\begin{pmatrix}1 & \ell_2 & \dots & \ell_n\end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M=CL$.

b) On rappelle que $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M. Montrer que $\mathrm{Tr}(M)=LC$.

c) Établir que l'on a l'égalité $M^2=\mathrm{Tr}(M)M$.

3) Montrer que $\mathrm{Tr}(M)$ est valeur propre de f.

4) On suppose $\mathrm{Tr}(M)=0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

5) On suppose $\mathrm{Tr}(M)\neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

Partie 2

On désigne par a, b, c trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1\end{pmatrix}$.

On suppose que A n'est pas inversible.

6) a) En considérant le système $AX=0$, où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, établir, en raisonnant par l'absurde, la relation : $ac=b$.

b) En déduire le rang de A.

7) **a)** Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, A^n appartient à $\mathrm{Vect}(A)$.

Exercice 2

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice, sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x<1 \end{cases}$.

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=[1,+\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

4) On pose $Y=\ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que f. On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX(c)` utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler X.

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c.

On pose $Y_1=\ln(X_1)$, $Y_2=\ln(X_2)$ et $Z=X_1X_2$.

5) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulZ(c)` utilisant la fonction `simulX(c)` et permettant de simuler Z.

6) Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que la variance de Z est donnée par :

$$V(Z)=\frac{c^2\left(2c^2-4c+1\right)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

7) **a)** Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2.

b) En déduire la loi de cY_1+cY_2.

8) a) Soit H la fonction de répartition de Y_1+Y_2 et K celle de cY_1+cY_2.
Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de K, puis vérifier qu'une densité de Y_1+Y_2 est la fonction h définie par :

$$h(x)=\begin{cases} c^2 x\,\mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x\geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z. Exprimer, pour tout réel x, $F_Z(x)$ à l'aide de H. En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x)=\begin{cases} \dfrac{c^2\ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x\geq 1 \\ 0 & \text{si } x<1 \end{cases}$$

9) a) Pour tout réel α strictement supérieur à 1, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 6).

Exercice 3

On effectue des lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $p\in\,]0,1[$ et "face" avec la probabilité $q=1-p$.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note F_k l'événement « obtenir "face" au k^{e} lancer » et on pose $P_k=\overline{F_k}$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de "face" obtenus avant le premier "pile".

1) a) Utiliser les événements F_k et P_k pour déterminer la loi de X que l'on note désormais $BN(p)$.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2) Selon le principe de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on admet qu'il existe deux variables aléatoires Q et R, définies sur le même espace probabilisé que X et telles que $X=3Q+R$, avec $Q(\Omega)=\mathbb{N}$ et $R(\Omega)=\{0,1,2\}$.
Par exemple, si X prend la valeur 5, alors Q prend la valeur 1 et R prend la valeur 2.

a) Écrire, pour tout entier naturel k, l'événement $(Q=k)$ à l'aide de la variable X.

b) En déduire que Q suit la loi $BN\left(1-q^3\right)$.

3) Montrer que :
$$P(R=0)=\frac{1}{1+q+q^2},\ P(R=1)=\frac{q}{1+q+q^2}\ \text{ et } P(R=2)=\frac{q^2}{1+q+q^2}.$$

4) Vérifier que les variables Q et R sont indépendantes.

5) Simulation des variables X, Q et R.

a) Expliquer pourquoi la fonction suivante renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice.

```
def simulX(p):
   X=rd.geometric(p)-1
   return X
```

b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle renvoie les valeurs prises respectivement par X, Q et R.

```
def div(p):
   X=simulX(p)
   Q=------
   R=------
   return(X,Q,R)
```

Problème

Rappel de quelques formules trigonométriques utiles dans ce problème :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$
$$\cos(2a)=2\cos^2 a-1.$$
$$\cos(2a)=1-2\sin^2 a.$$

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers (positifs ou négatifs) et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que l'ensemble E des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles (somme de deux applications et produit d'une application par un réel) est un espace vectoriel.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $I_n=[\![0,n-1]\!]$.
On rappelle qu'une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est dite n-périodique (ou de période n) si :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ f(k+n)=f(k)$$

On note F_n l'ensemble des applications n-périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit h l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ h(k)=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Vérifier que h est élément de F_n.

2) Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E.

3) Soit k un entier quelconque.
On admet qu'il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times I_n$ tel que $k = nq + r$.
Montrer alors que, pour toute fonction f de F_n, on a l'égalité :

$$f(k) = f(r)$$

4) Pour tout i de I_n, on considère la fonction n-périodique e_i de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ (la fonction e_i est donc élément de F_n) dont la restriction à I_n est donnée par :

$$\forall k \in I_n,\ e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Utiliser la question 3) pour montrer que, pour tout élément f de F_n, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)$$

b) En déduire que la famille $B_n = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de F_n.

c) Quelles sont les coordonnées d'un élément quelconque f de F_n dans la base B_n ?

5) Pour tout couple (f,g) de $F_n^{\,2}$, on pose : $\langle f,g \rangle = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k) g(k)$.

a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F_n. On note $\|\ \|$ la norme associée.

b) Montrer que la base B_n est orthonormale pour ce produit scalaire.

c) On admet que, pour tout couple (a,b) de réels, avec $b \in \left]0, 2\pi\right[$, et pour tout entier k, on a :

$$2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos(a + kb) = \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

Montrer la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

d) En déduire les égalités $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0$.

e) Déterminer la norme $\|h\|$ de l'application h présentée à la question 1).

6) On considère l'application notée D qui, à tout élément f de F_n, associe l'application $D(f)$, que l'on pourra noter Df s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Df(k) = f(k+1) - f(k)$$

a) Vérifier que, pour tout f de F_n, Df est élément de F_n.

b) Montrer que l'application $D : f \mapsto D(f)$ est un endomorphisme de F_n.

c) Vérifier que l'application Dh est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,,\ Dh(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)$$

d) En déduire, à l'aide de la deuxième des égalités de la question 5d), que :

$$\|Dh\| = \sqrt{2n}\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

7) On considère l'application notée Δ qui, à tout élément f de F_n, associe l'application $\Delta(f)$, que l'on pourra noter Δf s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,,\ \Delta f(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)$$

On admet que Δ est un endomorphisme de F_n.

a) Montrer que : $\forall (f,g) \in F_n^{\,2}$, $\langle f, \Delta g\rangle = -\langle Df, Dg\rangle$.

b) En déduire que Δ est un endomorphisme symétrique de F_n.

c) Montrer que les valeurs propres de Δ sont négatives ou nulles.

8) On note ε_0 l'application constante de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ égale à 1.

a) Vérifier que $\varepsilon_0 \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.

b) Montrer alors que $\operatorname{Ker}(\Delta) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_0)$.

9) On pose $c = \min\{|\lambda|,\ \lambda \in \operatorname{Sp}(\Delta)\setminus\{0\}\}$, où $\operatorname{Sp}(\Delta)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de Δ. On considère un élément f de F_n tel que $\langle f, \varepsilon_0\rangle = 0$.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormale de F_n, formée de vecteurs propres de Δ, de la forme $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\right)$, puis montrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i$.

b) Montrer enfin que : $\|Df\|^2 \geq c\|f\|^2$.

10) Dans cette question, on prend $n = 3$ et on note A la matrice de Δ dans la base B_3 de F_3.

a) Vérifier que la première colonne de A est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On admet, pour la suite, que l'on a : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
En déduire les valeurs propres de Δ.
Comment s'écrit l'inégalité obtenue à la question 9b) dans ce cas ?

c) Que peut-on déduire du cas de l'application h ?

Conseils 2023

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) Le théorème du rang s'impose.

2) a) Comme C est non nulle et comme $\mathrm{rg}(M)=1$, les autres colonnes de M sont de la forme $\ell_2 C$, …, $\ell_n C$.

b) En notant $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, on peut expliciter $\mathrm{Tr}(M)$.

c) On a $M^2=(CL)(CL)$, ce que l'on peut écrire $M^2=C(LC)L$.

3) Écrire l'égalité $M^2=\mathrm{Tr}(M)M$ sous la forme $\big(M-\mathrm{Tr}(M)I\big)M=0$ et raisonner par l'absurde.

4) La question 3) fournit un joli polynôme annulateur de M.
Avec la question 1), on peut alors montrer que 0 est la seule valeur propre de M.

5) Le polynôme $x\mapsto x^2-\mathrm{Tr}(M)x$ est annulateur de M et ses racines sont 0 et $\mathrm{Tr}(M)$ donc les seules valeurs propres possibles de M sont 0 et $\mathrm{Tr}(M)$. Il faut ensuite les confirmer.

Partie 2

6) a) Après suppression des dénominateurs, les opérations élémentaires qui s'imposent sont $L_1\leftarrow L_1-aL_3$ puis $L_2\leftarrow L_2-L_3$.

b) Les deux dernières colonnes de A sont proportionnelles à la première.

7) a) La matrice A vérifie les conditions permettant d'utiliser la question 5).

b) Il suffit de prouver que A^n est proportionnelle à A.

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

1) C'est parce que $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit au seul vecteur nul que 0 est valeur propre de f.

2) c) Ne pas oublier qu'on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, ce qui est le cas de LC, à un réel.

3) Si on a établi que $M\,C = \mathrm{Tr}(M)C$, il faut préciser que $C \neq 0$ avant de conclure que C est un vecteur propre de M.

4) Les valeurs propres d'une matrice sont *parmi* les racines d'un polynôme annulateur de cette matrice donc il faut éviter d'asséner que ce sont les racines du polynôme annulateur en question !

5) Attention, il n'est pas sûr, a priori, que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$ soit exactement de dimension 1.

Partie 2

6) a) Faire attention de bien raisonner par systèmes équivalents et aussi de coder les opérations élémentaires utilisées (question de crédibilité).

b) Bien préciser que la première colonne de A n'est pas nulle afin d'exclure que A soit de rang 0 (dans ce cas, A serait nulle).

7) a) Prendre soin de signaler que A vérifie les conditions permettant d'appliquer certains résultats de la partie 1.

b) Si on passe par là, mieux vaut montrer que $A^n = P\,D^n P^{-1}$ plutôt que de le « claquer ».

❖ Aide à la résolution

Partie 1

1) Comme $\mathrm{rg}(M) = 1$, on a $\mathrm{rg}(f) = 1$, ce qui donne la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

2) a) Il reste à exploiter le fait que $M = \begin{pmatrix} C & \ell_2 C & \dots & \ell_n C \end{pmatrix}$ en posant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

b) On trouve $\mathrm{Tr}(M) = c_1 + c_2\ell_2 + \dots + c_n\ell_n$ puis il reste à l'écrire sous forme de produit matriciel.

c) Ayant $M^2 = C(LC)L$, il suffit de remarquer que LC est un réel.