Mathématiques

exercices incontournables

j'intègre

BCPST 1re année

V. Rousse, N. Blanc

Mathématiques
exercices incontournables

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-071227-4

Table des matières

Outils de bases

Algèbre

Analyse

Probabilités

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de première année B.C.P.S.T. de classes préparatoires scientifiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques et d'algorithmique par le biais d'exercices. Chacun est suivi d'une correction détaillée et commentée dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.
Le livre est divisé en quatre parties et dix-neuf chapitres, consacrés chacun à une partie du programme avec respect de la séparation en deux semestres. Au sein d'un même chapitre, les exercices ont été choisis de façon à passer en revue toutes les capacités attendues autour des notions à connaître. Ces capacités sont listées à la fin de chaque chapitre avec un renvoi explicite aux questions et exercices dans lesquels elles sont utilisées. Les principales formules sont également rappelées au sein de chaque capacité.
En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement :

- la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements au brouillon (nous nous sommes en particulier autorisés une plus grande liberté dans la façon de formuler les idées et le sens profond de certaines notions parfois au mépris d'une certaine rigueur mathématique mais toujours dans un souci pédagogique),
- de la rédaction finale, rigoureuse et précise.

Cette dernière étape est signalée dans le texte par la présence d'un liseré gris sur la gauche et d'un . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable.
Par ailleurs, nous avons souhaité mettre en exergue les idées réutilisables en les rédigeant sur un fond grisé et indiqué par un . De même, la présence d'une difficulté courante est signalée par un .
L'index présent en fin d'ouvrage fournit des renvois aux principales notions aussi bien vers la liste de capacités du chapitre dont elles dépendent que vers leurs utilisations explicites dans d'autres chapitres.
Enfin, comme l'usage le veut l'expression “si et seulement si” sera parfois abrégée en “ssi”.

Partie 1
Outils de bases

Outils de bases

CHAPITRE

1

Calcul algébrique

On rappelle le vocabulaire élémentaire associé aux sommes $\sum_{k=m}^{n} u_k$ et aux produits $\prod_{k=m}^{n} u_k$ d'un nombre fini de termes :

- k est l'*indice* de la somme ou du produit,
- m et n sont les *bornes* respectivement *inférieure* et *supérieure* de la somme ou du produit,
- u_k est le *terme général* de la somme ou du produit.

Exercice 1.1 : Techniques de sommation de base

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$) et de premier terme u_0. Calculer $\sum_{k=m}^{n} u_k$.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme u_0. Calculer $\sum_{k=m}^{n} u_k$ et $\prod_{k=m}^{n} u_k$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Écrire une fonction `Python` d'entête `def produit_impairs(n)` qui calcule le produit des n premiers entiers naturels impairs.

4. Calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ et $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$.

1. Il y a plusieurs façons naturelles de procéder :

- la suite est arithmétique donc son terme général s'écrit $u_k = u_0 + kr$ et on est ainsi ramené à une somme d'entiers consécutifs ;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} u_k &= \sum_{k=m}^{n}(u_0+kr) = u_0\sum_{k=m}^{n}1 + r\sum_{k=m}^{n}k\\
&= u_0(n-m+1) + r\left[\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{m-1}k\right]\\
&= (n-m+1)u_0 + r\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2}\right]\\
&= (n-m+1)u_0 + \frac{n^2+n-m^2+m}{2}r\\
&= (n-m+1)u_0 + \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}r.
\end{aligned}$$

- on peut alternativement utiliser l'expression $u_k = u_m + (k-m)r$ pour se ramener directement à la somme des premiers entiers ;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n}[u_m+(k-m)r] &= u_m\sum_{k=m}^{n}1 + r\sum_{k=m}^{n}(k-m)\\
&= u_m(n-m+1) + r\sum_{k'=0}^{n-m}k'\\
&\qquad \text{(avec le changement d'indice } k' = k-m\text{)}\\
&= (n-m+1)u_m + r\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\\
&= (n-m+1)(u_0+mr) + r\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\\
&= (n-m+1)u_0 + r\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}.
\end{aligned}$$

- on peut encore utiliser la démarche du jeune Gauss [*] en ajoutant la somme inconnue à elle-même mais en ordonnant les termes dans l'autre sens

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & \cdots & + & k & + & \cdots & + & n-1 & + & n\\
n & + & n-1 & + & \cdots & + & n+1-k & + & \cdots & + & 2 & + & 1\\
\hline
(n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

ce qui lui a permis d'obtenir rapidement que $2\sum_{k=1}^{100} k = 100 \times (100+1)$.

Avec les changements d'indice $k' = k-m$ et $k'' = n-k$, on a

$$\sum_{k=m}^{n}u_k + \sum_{k=m}^{n}u_k = \sum_{k'=0}^{n-m}u_{m+k'} + \sum_{k''=0}^{n-m}u_{n-k''} = \sum_{k=0}^{n-m}(u_{m+k}+u_{n-k}).$$

∗. Carl Friedrich Gauss (1777-1865), le *Prince des mathématiciens*, a ouvert la voie à de nombreux domaines des mathématiques. Il racontait lui-même cette anecdote pour construire sa légende.

On remarque alors que $u_{m+k}+u_{n-k} = u_m+kr+u_n-kr = u_m+u_n$ est indépendant de k, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} u_k &= (n-m+1)\frac{u_m+u_n}{2} = (n-m+1)\frac{u_0+mr+u_0+nr}{2} \\ &= (n-m+1)u_0 + r\frac{(n-m+1)(m+n)}{2}.\end{aligned}$$

2. Pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, il y a encore plusieurs façons naturelles de procéder :

- la suite est géométrique donc son terme général s'écrit $u_k = u_0q^k$ et on est ainsi ramené à la somme connue $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$;

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} u_k &= \sum_{k=m}^{n} u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=m}^{n} q^{k-m} \\ &= u_m \sum_{k'=0}^{n-m} q^{k'} \quad \text{(avec le changement d'indice } k'=k-m) \\ &= u_m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = u_0q^m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.\end{aligned}$$

- on peut aussi reprendre l'idée de Gauss et voir comment la relation $u_{k+1} = qu_k$ permet d'obtenir une équation algébrique du premier degré d'inconnue la somme cherchée.

$$q\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_{k+1} = \sum_{k'=m+1}^{n+1} u_{k'} = \sum_{k=m}^{n} u_k + u_{n+1} - u_m,$$

d'où

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_m-u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_m-qu_n}{1-q} = \frac{u_0q^m-qu_0q^n}{1-q} = u_0q^m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

Quant au produit des termes consécutifs de la même suite géométrique, le problème se déplace dans l'exposant et se ramène à la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{k=m}^{n}(u_0q^k) = u_0^{n-m+1}q^{\left(\sum\limits_{k=m}^{n} k\right)} = u_0^{n-m+1}q^{\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}}.$$

3. Le produit fait penser à la définition d'une factorielle mais seuls les termes impairs sont présents :

$$\begin{aligned} 1\times 2\times 3\times\cdots\times(2k-1)\times(2k)\times\cdots\times(2n-1)\times(2n) &= (2n)! \\ 1\times \phantom{2\times{}} 3\times\cdots\times(2k-1)\times\cdots\times(2n-1) &= \prod_{k=1}^{n}(2k-1). \end{aligned}$$

Les termes pairs manquants donnent eux :

$$2\times 4\times\cdots\times(2n-2)\times(2n) = [\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{n \text{ fois}}][1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n].$$

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}2\right)\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k\right)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

L'implémentation en `Python` du calcul du produit se fait naturellement à l'aide d'une boucle `for`, il y a plusieurs possibilités selon que l'on calcule le terme général du produit à part ou non.

```
def produit_impairs(n):   #
   P=1                    #
   for k in range(2,n+1): #
      P=P*(2*k-1)         #
   return P               #
```

```
def produit_impairs(n): #
   P,I=1,3              #
   for k in range(1,n): #
      P,I=P*I,I+2       #
   return P             #
```

```
def produit_impairs(n):     #
   P=1                      #
   for k in range(3,2*n,2): # boucle pour chaque impair entre 3 et 2n-1
      P=P*k                 #
   return P                 #
```

4. On commence par écrire la somme double comme deux sommes simples imbriquées ;

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j| \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|i-j|\right)$$

puis on découpe la somme intérieure selon le signe de la différence $i-j$ pour pouvoir "éliminer" la valeur absolue ;

$$= \quad \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)+0+\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right]$$

en les écrivant en développé, on constate que les deux sommes sont connues

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) &= (i-1)+(i-2)+\cdots+2+1,\\
\sum_{j=i+1}^{n}(j-i) &= 1+2+\cdots+(n-i-1)+(n-i)\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j| &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j'=1}^{i-1}j'+\sum_{j''=1}^{n-i}j''\right]\\
&\qquad \text{(avec les changements d'indice } j'=i-j \text{ et } j''=j-i\text{)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(i-1)i}{2}+\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right]
\end{aligned}$$

on regroupe alors selon les puissances de i et on conclut par linéarité de la somme.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left[i^2-(n+1)i+\frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(n+1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}n^2(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)}{6}\Big[2n+1-3(n+1)+3n\Big]=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

Quant à la seconde somme, on choisit de sommer en premier (la somme extérieure) sur j qui varie donc selon $1 \cancel{\leqslant i} \leqslant j \leqslant n$ (à ce stade, i n'existe pas encore) *i.e.* $\sum_{j=1}^{n}$, une fois j fixé, on somme sur i qui varie donc selon $1 \leqslant i \leqslant j \cancel{\leqslant n}$ (la contrainte concernant j a déjà été prise en compte précédemment) *i.e.* $\sum_{i=1}^{j}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} &= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\right]\\
&= \sum_{j=1}^{n}(2^j-1) \quad \text{(d'après la formule du binôme de Newton)}\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}-\sum_{j=1}^{n}1 \quad \text{(par linéarité de la somme)}\\
&= 2\frac{1-2^n}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.
\end{aligned}$$

Exercice 1.2 : Séparation pairs/impairs

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}$.

En considérant $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$, calculer les deux sommes P_n et I_n.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$.

1. Écrivons les sommes en développé pour visualiser ce qui se passe :

$$\begin{array}{rcl}
P_n & = & \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \binom{2n}{2k} + \cdots\cdots + \binom{2n}{2n} \\
I_n & = & \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \cdots + \binom{2n}{2k-1} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} \\
\hline
P_n + I_n & = & \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \cdots + \binom{2n}{2k-1} + \binom{2n}{2k} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} \\
\hline
P_n - I_n & = & \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \cdots - \binom{2n}{2k-1} + \binom{2n}{2k} - \cdots - \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}.
\end{array}$$

On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
P_n + I_n &= \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}, \\
P_n - I_n &= \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} = (1-1)^{2n} = 0.
\end{aligned}$$

D'où $P_n = I_n = \frac{1}{2} 2^{2n} = 2^{2n-1}$.

2. Là encore, écrivons la somme en développé :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 = 0^2 - 1^2 + 2^2 - \cdots - (2p-1)^2 + (2p)^2 - \cdots - (2n-1)^2 + (2n)^2$$

pour constater qu'il y a des simplifications entre deux termes consécutifs puisque $(2p)^2 - (2p-1)^2 = [2p + 2p - 1][2p - (2p-1)] = 4p - 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{p=1}^{n} (2p)^2 - \sum_{p=1}^{n} (2p-1)^2 \\
&= \sum_{p=1}^{n} (4p-1) = 4 \sum_{p=1}^{n} p - \sum_{p=1}^{n} 1 \\
&= 2n(n+1) - n = n(2n+1).
\end{aligned}$$

Exercice 1.3 : La somme des premiers cubes I

On se propose de calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par quatre* méthodes différentes et indépendantes.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Calculer $(k+1)^4 - k^4$, en déduire que

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

et retrouver l'expression de S_n.

3. **a.** Justifier que $(n+1-k)^3 = (n+1)^3 - 3(n+1)^2k + 3(n+1)k^2 - k^3$.

b. En déduire que

$$S_n = n(n+1)^3 - 3(n+1)^2\sum_{k=1}^{n} k + 3(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - S_n$$

et retrouver l'expression de S_n.

4. **a.** En calculant de deux façons $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} j^2$, montrer que

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i.$$

b. Retrouver alors l'expression de S_n.

1. Le résultat est donné dans l'énoncé, le raisonnement par récurrence est bien possible, encore faut-il indiquer clairement l'hypothèse de récurrence.

Pour $n \geqslant 1$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion "$S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$".

Pour l'initialisation, $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ d'une part et $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = \dfrac{2^2}{4} = 1$ d'autre part donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Pour l'hérédité, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}[n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Finalement, par principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$*$. On trouvera une cinquième méthode dans l'exercice 6.2 en page 108.

2. On commence par développer pour visualiser la simplification.

D'après la formule du binôme de Newton,
$$(k+1)^4 - k^4 = (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Le terme général de S_n apparaît dans le membre de droite, on va donc sommer cette égalité pour $1 \leqslant k \leqslant n$ pour faire apparaître S_n.

En sommant cette égalité, pour k variant entre 1 et n, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \Big[(k+1)^4 - k^4\Big] = \sum_{k=1}^{n} \Big(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\Big).$$
D'où, par télescopage dans le membre de gauche et par linéarité de la somme dans le membre de droite,
$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n.$$
En isolant S_n, on conclut que
$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - 1 - n - 4\sum_{k=1}^{n} k - 6\sum_{k=1}^{n} k^2\right]\\
&= \frac{1}{4}\Big[(n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)\Big]\\
&= \frac{n+1}{4}\Big[(n+1)^3 - 1 - 2n - n(2n+1)\Big]\\
&= \frac{n+1}{4}\Big[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n - 2n^2 - n\Big]\\
&= \frac{n+1}{4}(n^3 + n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

3.a. On reconnaît les coefficients de la formule du binôme, il suffit donc de bien découper $n+1-k$ en $(n+1)-k$.

D'après la formule du binôme de Newton,
$$(n+1-k)^3 = [(n+1)-k]^3 = (n+1)^3 - 3(n+1)^2k + 3(n+1)k^2 - k^3.$$

3.b. Là encore, on reconnaît à droite le terme général de S_n et on somme donc l'égalité.

Par linéarité de la somme,
$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^3 = (n+1)^3 n - 3(n+1)^2\sum_{k=1}^{n} k + 3(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - S_n.$$

On doit aussi reconnaître S_n dans le membre de gauche ce qu'on constate en écrivant la somme en développé $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^3 = n^3 + (n-1)^3 + \cdots + 2^3 + 1^3$ et qui incite donc à faire un changement d'indice par symétrie.

En outre, avec le changement d'indice $j = n + 1 - k$, $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^3 = S_n$ donc

$$S_n = n(n+1)^3 - 3(n+1)^2\frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - S_n$$

$$\iff \quad 2S_n = \frac{n(n+1)^2}{2}\Big[2(n+1) - 3(n+1) + (2n+1)\Big]$$

$$\iff \quad S_n = \frac{n(n+1)^2}{4}\Big[-(n+1) + (2n+1)\Big]$$

$$\iff \quad S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4.a. Il s'agit évidemment d'écrire la somme double comme deux sommes imbriquées avec les deux ordres possibles de sommation.

D'une part,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{j=1}^{n}(j^2 \times j) = S_n$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{i-1} j^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(i-1)i(2i-1)}{6}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6}(2i^3 - 3i^2 + i)\right].\end{aligned}$$

D'où, par linéarité de la somme,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i.$$

4.b. Il ne reste plus qu'à extraire S_n de l'égalité précédente et utiliser là encore les sommes connues des premiers entiers et premiers carrés.

En regroupant toutes les occurrences de S_n dans le membre de gauche,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\iff \quad \frac{4}{3}S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\iff \quad S_n = \frac{3}{4}\frac{n(n+1)}{6}\left[n(2n+1) + \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\iff \quad S_n = \frac{n(n+1)}{4}\,\frac{n(2n+1)+n}{2}$$

$$\iff \quad S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 1.4 : Sommes télescopiques

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$ pour $n \geqslant 2$.

2. **a.** Déterminer des constantes réelles a, b et c telles que

$$\forall\, k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k(k^2-4)} = \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+2}.$$

b. En déduire une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k^2-4)}$ pour $n \geqslant 7$.

1. Il faut transformer l'écriture du terme général pour mettre en évidence la forme $a_{i+1} - a_i$ (utilisée ici avec $a_i = \ln i - \ln(i-1)$).

On a, pour $i \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{1}{i^2}\right) &= \ln\frac{i^2-1}{i^2} = \ln\frac{(i+1)(i-1)}{i^2} = \ln(i+1) - 2\ln i + \ln(i-1)\\ &= \Big[\ln(i+1) - \ln i\Big] - \Big[\ln i - \ln(i-1)\Big].\end{aligned}$$

Par télescopage, on en déduit

$$\sum_{i=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \Big[\ln(n+1) - \ln n\Big] - \Big[\ln 2 - \ln(2-1)\Big] = \ln\frac{n+1}{2n}.$$

2.a. Comme mentionné dans l'énoncé, on demande de trouver a, b et c mais pas forcément d'expliquer comment. On procède donc au brouillon en partant de l'égalité à atteindre et en réduisant le second membre au même dénominateur

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k^2-4)} &= \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+2} = \frac{ak(k+2) + b(k-2)(k+2) + c(k-2)k}{(k-2)k(k+2)}\\ &= \frac{a(k^2+2k) + b(k^2-4) + c(k^2-2k)}{k(k^2-4)} = \frac{(a+b+c)k^2 + 2(a-c)k - 4b}{k(k^2-4)}.\end{aligned}$$

La comparaison des termes de même degré (en k) du numérateur fait dire qu'il suffit d'avoir $a+b+c=0$, $a-c=0$ et $-4b=1$ qu'on résout très simplement : $b = -\dfrac{1}{4}$ et $a = c = -\dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Ces nombres obtenus au brouillon sont alors injectés dans le second membre et la réduction au même dénominateur montre l'égalité avec le membre de gauche.

Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{8(k-2)} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{8(k+2)} &= \frac{k(k+2) - 2(k-2)(k+2) + (k-2)k}{8(k-2)k(k+2)}\\ &= \frac{k^2+2k-2(k^2-4)+k^2-2k}{8k(k^2-4)} = \frac{1}{k(k^2-4)}\end{aligned}$$

donc $a = c = \dfrac{1}{8}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$ conviennent.

2.b. Ce coup-ci, après transformation d'écriture, la structure $a_{k+1} - a_k$ n'apparaît pas clairement.

Pour $n \geqslant 7$,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k^2-4)} = \frac{1}{8} \sum_{k=3}^{n} \left[\frac{1}{(k-2)} - \frac{2}{k} + \frac{1}{(k+2)} \right]$$

En écrivant les sommes en développé,

$$\begin{array}{rcccccc}
\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} - 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+2} = & & \dfrac{1}{1} & - & \dfrac{2}{3} & + & \dfrac{1}{5} \\
& + & \dfrac{1}{2} & - & \dfrac{2}{4} & + & \dfrac{1}{6} \\
& + & \dfrac{1}{3} & - & \dfrac{2}{5} & + & \dfrac{1}{7} \\
& + & \vdots & - & \vdots & + & \vdots \\
& + & \dfrac{1}{n-4} & - & \dfrac{2}{n-2} & + & \dfrac{1}{n} \\
& + & \dfrac{1}{n-3} & - & \dfrac{2}{n-1} & + & \dfrac{1}{n+1} \\
& + & \dfrac{1}{n-2} & - & \dfrac{2}{n} & + & \dfrac{1}{n+2},
\end{array}$$

on constate qu'il faut décaler les colonnes verticalement (de deux crans vers le haut pour la première et deux vers le bas pour la dernière) pour aligner les simplifications donc on va faire des changements d'indice par translation pour mettre en évidence ces simplifications.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\left[\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} - 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+2}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\sum_{k'=1}^{n-2} \frac{1}{k'} - 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k''=5}^{n+2} \frac{1}{k''}\right] \\
&\qquad \text{(avec les changements d'indice } k' = k-2 \text{ et } k'' = k+2) \\
&= \frac{1}{8}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{11}{12} - \frac{2}{n^2-1} - \frac{2}{n(n+2)}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{11}{12} - 2\frac{n(n+2)+(n^2-1)}{n(n^2-1)(n+2)}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{11}{12} - 2\frac{2n^2+2n-1}{n(n^2-1)(n+2)}\right].
\end{aligned}$$

Exercice 1.5 : Formule du binôme et moments de la loi binomiale

On se propose de calculer de deux façons[§] distinctes la valeur des sommes

$$E_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad I_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

$$\text{et} \qquad M_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (\text{avec } p \neq 0).$$

1. **a.** Vérifier que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

b. En déduire la valeur de $E_n(p)$.

c. Avec la même stratégie, montrer que

$$M_n(p) = n(n-1)p^2 \qquad \text{et} \qquad I_n(p) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

2. **a.** Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k(1-p)^{n-k}$.

b. En dérivant par rapport à x l'égalité obtenue, montrer que $E_n(p) = np$.

c. En dérivant une seconde fois, déterminer une expression simple de $M_n(p)$ et, en intégrant au contraire sur $[0, p]$ la première égalité, calculer $I_n(p)$.

3. Avec le changement d'indice $j = n - k$, montrer que $E_n(p) = n - E_n(1-p)$ et retrouver la valeur de $E_n(p)$ pour $p = \dfrac{1}{2}$.

1.a. Il s'agit ni plus ni moins de la formule du pion dont on va reproduire la preuve à l'aide de la définition des coefficients binomiaux par les factorielles.

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

1.b. La définition de $E_n(p)$ ressemble beaucoup au développement du binôme au terme surnuméraire k près (que l'on ne peut mettre en facteur vu que c'est l'indice de sommation). Il suffirait d'éliminer ce facteur, l'égalité précédente va permettre de transférer la dépendance en k en dépendance en n que l'on pourra alors mettre en facteur. La somme obtenue ressemble alors clairement au développement du binôme mais pour la puissance $(n-1)$-ième.

§. On trouvera un développement théorique plus systématique de la seconde façon dans l'exercice 18.9 en page 354.

D'où,

$$\begin{aligned} E_n(p) &= 0+\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np(p+1-p)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

1.c. On reprend donc la stratégie en utilisant d'abord la formule du pion pour convertir la dépendance en $k(k-1)$ ou $\dfrac{1}{k+1}$ en dépendance en n puis on reconnaît alors une formule du binôme.

On a, pour $2 \leqslant k \leqslant n$, $k(k-1)\binom{n}{k} = (k-1)n\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.
D'où,

$$\begin{aligned} M_n(p) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} \quad \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\ &= n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ donc

$$\begin{aligned} I_n(p) &= \frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{(n+1)-(k+1)} \\ &= \frac{(p+1-p)^{n+1} - \binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1-0}}{(n+1)p} \\ &= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}. \end{aligned}$$

2.a. Il s'agit de la partie développée de la formule du binôme.

D'après la formule du binôme de Newton, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-p)^{n-k} = (x+1-p)^n$.

2.b. Les deux membres sont sous forme polynomiale donc la dérivation ne pose pas de problème.

En dérivant par rapport à x, on obtient, par linéarité de la dérivation,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}(1-p)^{n-k} = n(x+1-p)^{n-1}.$$

En particulier, avec $x=p$, on a $\dfrac{1}{p}E_n(p) = n$ donc $E_n(p) = np$.

2.c. On suit l'indication donnée en dérivant une seconde fois l'égalité.

En dérivant une seconde fois toujours par rapport à x, on a

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}(1-p)^{n-k} = n(n-1)(x+1-p)^{n-2}$$

d'où, en particulier avec $x = p$, $\frac{1}{p^2} M_n(p) = n(n-1)$ de sorte que $M_n(p) = n(n-1)p^2$.

Pour $I_n(p)$, on procède comme indiqué, par intégration.

En reprenant l'égalité initiale et en intégrant sur $[0, p]$, on a, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^p x^k \mathrm{d}x (1-p)^{n-k} &= \int_0^p (x+1-p)^n \mathrm{d}x \\
\iff \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^p (1-p)^{n-k} &= \left[\frac{(x+1-p)^{n+1}}{n+1}\right]_0^p \\
\iff \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{p^{k+1}}{k+1} (1-p)^{n-k} &= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où, $I_n(p) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$.

3. Le changement d'indice donné va échanger les rôles respectifs de p et $1-p$ et ne rien changer pour le coefficient binomial puisqu'il est symétrique.

Avec le changement d'indice $j = n - k$,

$$\begin{aligned}
E_n(p) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} (n-j) \binom{n}{n-j} p^{n-j} (1-p)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} (n-j) \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} \\
&= n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} - \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} \\
&= n(1-p+p)^n - E_n(1-p) \quad \text{(d'après la formule du binôme)} \\
&= n - E_n(1-p).
\end{aligned}$$

En particulier pour $p = \frac{1}{2}$, $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = n - E\left(\frac{1}{2}\right)$ d'où $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$.

Exercice 1.6 : La formule de Vandermonde I

1. En procédant par récurrence sur n, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left(\quad \forall\, (m,p) \in \mathbb{N}^2, \qquad \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p} \quad \right).$$

2. En utilisant l'égalité précédente, déterminer la valeur [*] de

$$\sum_{k=0}^{p} k\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

1. Il suffit de faire attention à bien mettre l'universalité en (m,p) dans l'hypothèse de récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'assertion

$$\forall\, (m,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

On tient aussi compte du fait que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est, par convention, nul lorsque la condition $0 \leqslant k \leqslant n$ n'est pas vérifiée.

Commençons par l'initialisation, pour $n = 0$, $\binom{n}{p-k}$ n'est non nul que pour $k = p$ de sorte que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m}{p}\binom{0}{0} = \binom{m+0}{p}$ et l'assertion $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Passons maintenant à l'hérédité en supposant l'assertion $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, si $p = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n+1}{p-k} = \binom{m}{0}\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{m+n+1}{0},$$

sinon, par la relation de Pascal,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n+1}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\left[\binom{n}{p-k} + \binom{n}{p-k-1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k-1}
\end{aligned}$$

*. Au facteur multiplicatif $\binom{n+m}{p}^{-1}$ près, il s'agit de l'espérance pour la loi hypergéométrique $\mathcal{H}\left(m+n, p, \dfrac{m}{m+n}\right)$.

C'est ici que l'on utilise l'hypothèse de récurrence pour le triplet (n, m, p) mais aussi pour le triplet $(n, m, p-1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n+1}{p-k} &= \binom{m+n}{p} + \binom{m+n}{p-1} \\ &\qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{m+n+1}{p} \qquad \text{(par la relation de Pascal)}\end{aligned}$$

autrement dit $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Comme dans l'exercice 1.5, il faut d'abord transférer la dépendance en l'indice de sommation k devant le coefficient binomial en dépendance en m, ce qui est encore réalisé par la formule du pion.

Soit $(n, m, p) \in \mathbb{N}^3$.

- Si $m \geqslant 1$ et si $p \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} k\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} &= \sum_{k=1}^{p} m\binom{m-1}{k-1}\binom{n}{p-k} \quad \text{(par la formule du pion)} \\ &= m\sum_{k'=0}^{p-1} \binom{m-1}{k'}\binom{n}{p-1-k'} \\ &\qquad \text{(avec le changement d'indice } k' = k-1\text{)} \\ &= m\binom{m-1+n}{p-1} \\ &\qquad \text{(par la formule du } \mathbf{1} \text{ pour } (n, m-1, p-1)\text{) ;}\end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier de traiter enfin les cas particuliers non encore pris en compte du fait que la formule de Vandermonde n'a été montrée que pour un triplet d'entiers positifs ou nuls.

- si $p = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{p} k\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = 0\binom{m}{0}\binom{n}{0} = 0 = m\binom{m-1+n}{0-1} \ ;$$

- si $m = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{p} k\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = 0\binom{0}{0}\binom{n}{p} = 0 = 0\binom{0-1+n}{p-1}.$$

Finalement, dans tous les cas,

$$\sum_{k=0}^{p} k\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = m\binom{m-1+n}{p-1}.$$

3. Le terme général de la somme est bien le produit de deux coefficients binomiaux comme dans la question précédente, il suffit d'en transformer un peu l'écriture pour rentrer précisément dans le cadre de la première question.

En appliquant l'égalité de la première question au triplet (n, n, n), on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n}.$$

D'où, par symétrie des coefficients binomiaux, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Liste des capacités attendues

- **Savoir reconnaître une somme usuelle ou un produit usuel** (*cf* exercices 1.1, 1.2, 1.3 et 1.5)

  ◇ le principe du terme constant

$$\boxed{\sum_{k=n_i}^{n_f} a = (n_f - n_i + 1)a} \quad \text{et} \quad \boxed{\prod_{k=n_i}^{n_f} a = a^{n_f - n_i + 1}},$$

  ◇ la somme des premiers entiers et des premiers carrés

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\ ¶},$$

  ◇ le produit des premiers entiers (ou factorielle) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$,

  ◇ la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}},$$

  ◇ la formule du binôme de Newton $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n}$.

- **Savoir utiliser un raisonnement par récurrence** (*cf* questions 1.3.**1** et 1.6.**1**)

- **Savoir utiliser les propriétés de la somme** † **et du produit** (*cf* exercices 1.2 et 1.3)

  ◇ la linéarité de la somme

$$\boxed{\sum_{j=n_i}^{n_f} (\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda \sum_{j=n_i}^{n_f} a_j + \mu \sum_{j=n_i}^{n_f} b_j},$$

¶. Attention à ne pas extrapoler inconsidérément à partir de cette forme de la formule ce que pourrait être la somme des premiers cubes !

†. ou plus exactement les propriétés de la sommation